矩形行列の行列式

中神祥臣／柳井晴夫 著

丸善出版

矩形行列の行列式

中神祥臣／柳井晴夫 著

丸 善 出 版

祝傘寿：荒木不二洋先生

まえがき

C.E. Cullis は，1910 年から 1912 年にかけてインドのカルカッタ大学で行った講義を，3 巻の大著 *Matrix and Determinoids* にまとめて，1913, 18, 25 年にイギリスのケンブリッジ大学から出版したが，その第 I 巻の冒頭から，縦長矩形行列の行列式の説明を始め，以後それに関するさまざまな計算を延々と展開している．この書物では，正方行列に対する行列式 (determinant) を，矩形行列の場合へ拡張して用いるときには，“determinoid” という用語を用いているが，本書ではこれらを区別せずに同じ行列式という用語に統一して話を進めている．例えば，3×2 行列の行列式の値は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix}$$

となる．この式からわかるように，この行列式は確かに正方行列の行列式の拡張になっている．本書は，このような，これまで世間ではほとんど知られてこなかった Cullis の行列式について，理工系全般，計量経済，計量心理，計量生物などに関心のある人を対象に想定しながら，高校から大学 1 年程度の数学の予備知識だけを仮定して，紹介することを目的にしており，通常の線形代数の入門書とは性格を異にしている．そのため，内容的に類書が見当らないので，前半は通常の線形代数の入門書と同程度の説明と記述を心掛けたが，後半では少し専門的と思われる数学固有の議論も展開している．この部分に，不慣れな読者は結果だけを読んで，この行列式のもつ幾何学的な意味を汲み取っていただければ十分である．

残念なことに，現時点で著者達はこの Cullis による行列式の有効な応用例をわずかしか持ち合わせていない．その原因には，正方行列の行列式の値は，直交行列あるいはユニタリ行列を用いて行列成分の座標変換を行っても，変化しない（つまりもとの直交座標系の選び方に依存しない）が，矩形行列の行列式の値は直交座標系の選び方に依存することが考えられる．この事実は空間における向きのような性質と関わることはわかるのであるが，それに対する対処法がまだ解明されていない．しかし，この行列式の定義自身は，正方行列に対する行列式の定義を，ラプラス展開を通じて，素朴に拡張したものであることがわかるので，数学的対象としてはごく自然であり，いずれ遠くない将来，広い人達に受け入れてもらえるものと期待している．

本書の内容に関しては，中神と柳井が事前に相談をし，第 1 章および 3.5 節の一般逆行列に関する原稿は中神と柳井が，第 2 章以降の残りの原稿は中神が用意し，双方の原稿が準備できた段階で，全体の内容の検討や調整を繰り返してできあがったものである．

本論を始めるに先立ち,「矩形行列の行列式って？」というお話を用意してある．これまで行列式といえば，正方行列に対してだけしか定義されていなかったので，本書の一部を取り出して，矩形行列の行列式の様子を，瞥見していただくための場所である．

第 1 章からが本論である．この章は，ここさえ読めば，線形代数が初めての人でも，矩形行列の行列式を理解してもらえるように，まず通常の線形代数の教科書に書かれている内容を説明しながら，正方行列の行列式の定義を行い，その特徴を足掛かりに自然に矩形行列の行列式の定義が導かれるように話を進めている．もう少し詳しく述べると，第 1 章の 1.1 節と 1.2 節は，ベクトル空間と行列に関する用語の説明にあてられている．正方行列の行列式の定義は 1.3 節において，1 つの成分だけからなる 1 次正方行列の値をその成分の与える数と定義してから，2 次以上の正方行列の行列式の値を，第 1 列に関する展開定義式を与えることにより，帰納的に定義する道を選んでいる．これは次数の低い場合の行列式の計算は親しみやすいので，それに慣れることにより，高次の行列式の感覚も養えると思ったからである．引き続き，この定義から通常の教科書に見られる行列式の一般展開式を導き，行列式が満たす基本的な性質をいくつか導いている．1.4 節で，本書の主題である矩形

行列の行列式の定義を与える．ここでは前節の正方行列の行列式の定義を踏襲し，縦長の 1 列だけからなる矩形行列の行列式を定義してから，列を増やしながら，第 1 列に関する展開定義式を使って，高次の行列式を帰納的に定義することにした．これにより矩形行列の行列式は，正方行列の行列式の自然な拡張になっていることが納得でき，しかも，正方行列の行列式のもつ基本的性質の多くが，矩形行列の行列式にも引き継がれることがわかる．そのお陰で，これらの性質は，行列式の一般的性質を論じるときにも，第 2 章へ行って，矩形行列の行列式を多重線形汎関数を用いて定義し直すときにも利用される．

この章の最後の 1.5 節では，正方行列を取り扱う際に，最も基本的と考えられる，固有値，行列の対角化，極分解などの説明をする．これまでの，どちらかといえば計算が中心の内容から，少し抽象的な言い回しの内容に変わってきているが，線形代数の議論の中では，行列の意味とか役割が最もよくわかる部分でもある．

とくに第 1 章では具体的な計算例などを豊富にして，Cullis 行列式に親しみやすくなるように心掛けたが，すでに線形代数に精通していて，Cullis 行列式の数学的な意味だけを知りたい読者は，第 2 章の 2.3 節から始めていただくと，計算例は少ないが，先の展望は得やすいと思われる．ただし，第 2 章からは主に複素ベクトル空間で議論を進めており，**内積は第 2 変数が線形**に選ばれている．実際，この節では，$n \times k$ 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ の Cullis 行列式を，ある規格化条件を満たす交代多重線形汎関数 $D_{n,k}$ を用いて，

$$\det{}_{n,k}(X) = D_{n,k}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$$

と定義し直し，矩形行列の行列式を扱う場合に基本となる公式を導いている．これ以降の議論はもっぱら，これらの公式をいかに運用するかに掛かってくる．最初は，正方行列式の場合にならって，Cullis 行列式のラプラス展開を最も一般的な形で与える．前にも述べたように，Cullis 行列式の定義は，このラプラス展開によって特徴付けられることがわかる．続く項では，コーシーにより示された正方行列の積に対する行列式の乗法性を矩形行列の行列式の場合にも考えてみる．実は，$n > k$ の場合の，$n \times k$ 行列の行列式の乗法性は，右からの k 次正方行列の積に対しては成り立つが，左からの n 次正方行

列の積に対しては必ずしも成り立たない．この事実は行列の基本変形が列に関しては可能であっても，行に関しては可能ではないことを意味している．

また，実正方行列の場合，行列式の値は，列ベクトルの張る平行多面体の体積に，多面体が埋め込まれている向きを表す正または負の符号を付けたものになっている．正方でない $n>k$ のときの，$n\times k$ 行列 X の場合には，絶対値 $|X|$ の行列式の値が，n 次元ベクトル空間において X の k 個の列ベクトルのなす k 次元平行多面体の体積を与えているが，もとの X の行列式の値が何を意味するのかは全くわかっていない．しかし，X の極分解 $V|X|$ を使うと，その行列式の値は，上に述べた行列式の右乗法性により，$n\times k$ 半等長行列 V の行列式と絶対値 $|X|$ の行列式の値の積に分けられるので，X の行列式の意味を知るには V の行列式の意味が解明できればよいことになるが，この時点では，この節末で述べる，$n\times(n-1)$ 等長行列の場合しかわからない．そこで，次の第 3 章ではこの点を詳しく検討する．ここまでが，入門書としての部分で，本書の前半を占めている．

第 3 章から，本書の後半に入る．ここでは Cullis 行列式の幾何学的な解釈を問題にしたいので，行列式をグラスマン代数を用いて書き直すことにする．3.1 節では，その代数の定義を，本書の目的に沿うよう「n 重線形汎関数から，n 重テンソル積上の線形汎関数へ」,「交代 k 重線形汎関数から，k 重外積冪上の線形汎関数へ」,「n 重外積冪から，グラスマン代数へ」といった自然な手順を踏んで与える．まず，3.1.1 項において，複数のベクトル空間から新たなベクトル空間を構成する方法としてテンソル積の説明をする．ここでは，2 つのベクトル空間のテンソル積 $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^m$ だけを平易に説明し，それが自然に内積空間になることを示す.（この議論は任意有限個のベクトル空間のテンソル積へも，容易に拡張することができるので，その議論は省いている.）次いで，$\mathbb{C}^n$ 上の k 重線形汎関数には，k 重テンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ 上の線形汎関数が一意的に対応することを示す．さらに，次項への準備として，これを汎関数から変換へと拡張し，$\mathbb{C}^n$ から内積空間 $\mathscr{W}$ への k 重線形変換には，k 重テンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ から $\mathscr{W}$ への線形変換が一意的に対応すること示す．続く，3.1.2 項から 3.1.4 項では，k 重テンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ において，テンソル積の順番に関して交代性を満たすベクトルだけを取り出して考える．その結果，古くから射影幾何や微分形式の議論などで使われている，グラスマン

代数という概念に自然に辿り着く．ここでは，これに代数（多元環）構造だけでなく内積も与えて，後の行列式の議論で必要になる性質を用意する．

3.2 節では Cullis 行列式をグラスマン代数を用いて記述する．2.3 節で Cullis 行列式を定義し直したときの k 重線形汎関数 $D_{n,k}$ には交代性が仮定されていたので，$n \times k$ 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ の Cullis 行列式の値はグラスマン代数のあるベクトル $\mathbf{1}^{(k)}$ を用いて，

$$\det{}_{n,k}(X) = (\mathbf{1}^{(k)} | \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)$$

と表すことができる．つぎに，このベクトルを具体的に記述するために，次節以降の議論の中で中心的な役割を果たす 2 つの規格直交基底「Cullis 基底」と「余 Cullis 基底」を導入する．この 2 番目の基底は射影幾何などで使われるプリュッカー座標を導くときの基底でもある．これらを用いることにより，ベクトル $\mathbf{1}^{(k)}$ が実は Cullis 基底の総和であることがわかり，$n \times k$ 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ の Cullis 行列式の値が，ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k$ を Cullis 基底で直交展開したときの係数の総和になっていることがわかる．続く 3.2.2 項では，Cullis 行列式の規格化条件を単純化して，余 Cullis 行列式という新たな行列式を導入する．この行列式の値も，余 Cullis 基底を用いて，Cullis 行列式の場合と同じように記述される．実は，3.2.3 項で説明するように，グラスマン代数上には，自己双対性を与えるホッジ作用素と呼ばれる反ユニタリ変換が存在する．この作用素はグラスマン代数を構成する前のベクトル空間における部分ベクトル空間とその直交補空間の関係をグラスマン代数へ持ち上げたような性質をもっていて，ある部分ベクトル空間の生成する Cullis 基底をその直交補空間の生成する余 Cullis 基底に対応させるなど，行列式の議論においても重要な役割を果たす．ここでは，その基本的な性質の説明だけに留めるが，3.4 節へ行って，Cullis 行列式の幾何学的性質を論じるときに役に立つ．最後の 3.2.4 項では，k 重外積冪のベクトルが $n \times k$ 行列から導かれている場合の特徴付けを与える．この結果は付録 A でプリュッカーの関係式を説明する際に利用される．

3.3 節では，グラスマン代数に作用する代表的な作用素を 2 つ取り上げる．前半では，生成作用素と消滅作用素を定義し，それを用いて，グラスマン多様体を記述するプリュッカーの関係式を導くための準備をする．後半では，交

代冪行列を取り扱う道具として，グラスマン代数への Γ 作用という概念を導入し，これを用いて交代冪行列を書き直し，その基本的な性質を導く．ここでの結果は 4.1 節において論じる，行列式の左乗法性の議論の中で利用される．最後に，Γ 作用を活用し，第 2 章で得られた Cullis 行列式のラプラス展開などは，k の値をいろいろ変えたときの，Cullis 基底に関する直交展開であることを示す．このように，高次元の部分ベクトル空間どうしの議論を，グラスマン代数におけるベクトルどうしの議論に帰着させることにより，矩形行列の議論に幾何学的視点が導入され，見通しがよくなる．

以上の準備の下に，3.4 節では，Cullis 行列式の幾何学的解釈の問題に入る．第 2 章末で述べたように，矩形行列の行列式がとる値の解明は，行列を極分解したときの，半等長変換の行列式の値の解明に帰着される．しかし，半等長部分が等長でない（退化している）場合には，絶対値の部分も退化し行列式の値は 0 になるので，非退化（つまり等長）なものに限って，議論を深めることにする．また，幾何学的な描像が得やすいように，議論を主に実行列に制限して行う．その結果，$n \times k$ 等長行列 V を，k 次元ベクトル空間を n 次元ベクトル空間へ埋め込む線形変換と解釈すると，この埋蔵の向きにより Cullis 行列式の値がいろいろと変化し，埋蔵の向きには「指向性」があることがわかる．そこで，その詳しい様子を，埋蔵された部分ベクトル空間，あるいはその直交補空間をグラスマン代数の中で捉え直したときに現れる幾何学的な特徴を用いて説明する．実は，付録 B で詳しく説明するように，非退化な矩形行列全体は，スティーフェル多様体と見なせるので，グラスマン多様体を底空間とし，一般線形群を構造群とする主ファイバー束の構造が入る．その結果，この各ファイバーの中では，Cullis 行列式の値が，列ベクトルのなす平行多面体の体積と，等長変換により決まる向きを表す符号と，正方行列の場合にはなかった新たな重みの 3 つにより定まることがわかる．

正方行列の行列式の値 = (平行多面体の体積，符号），
矩形行列の行列式の値 = (平行多面体の体積，符号，重み）．

この重みは $n \times k$ 行列 V の像である k 次元部分ベクトル空間が n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$（または $\mathbb{C}^n$）の中で占める位置により決まる値である．さらに，この符号付き重みは，3.4.3 項で説明する「指向性球面」上に実現され，正方

行列の場合の符号は，この球面が1次元に退化した場合になっている．この状況を踏まえて，3.4.4 項では，Cullis 行列式の値の絶対値が最大になる埋蔵や0になる埋蔵を問題にするが，$n-k \geq 3$ かつ $k \geq 3$ の場合には，まだ状況がよく掴めていない．

3.5 節では，3.4 節の結果を使って，一般逆行列への応用を考える．通常の線形代数の教科書には一般逆行列に関する記述があまり見受けられないので，その説明を手短にしてから，これまで説明してきた矩形行列の行列式の議論が，フェアブラザーズが論文 [4] で示唆したように，一般逆行列の議論に利用できることを説明する．例えば，矩形行列が非退化な場合には，最小ノルム型（または最小二乗型）の反射的一般逆行列が自然に得られることや，行列式の値が0でないときには，規格左余因子行列が最小ノルム型（または最小二乗型）の反射的一般逆行列になっていることなどを示す．さらに，ここで与えた一般逆行列がムーア–ペンローズ逆行列になるための必要十分条件も求められている．

第4章では Cullis 行列式に固有の話題をいくつか紹介する．4.1 節では，Cullis 行列式が左からの正方行列の積に関して乗法性を満たすために，正方行列が満たさなければならない必要十分条件が求められる．しかし，残念なことに，この条件は必ずしも使い勝手がよくないだけでなく，行列の行数 n と列数 k が $n-k \geq 3$ かつ $k \geq 3$ を満たす場合には，このような正方行列がどの程度存在するのか，まだわかっていない．4.2 節では，正方でない矩形行列の行列式の値がもつ指向性の分布を見るために，行列式の値を行列の像が埋蔵されている空間の回転により平均すると，その値が0になることを示す．この事実は指向性にはある種の対称性があることを示している．ここでの議論には回転群 $SO(n)$ 上の不変積分が必要になるが，議論が長くなるので，この部分の説明は付録 C へ回すことにした．4.3 節では，同一の行列を縦に積み重ねると行列式の値がどのように変化するか計算してある．矩形行列の行列式は，用途に応じて，Cullis 行列式とは独立に定義されているものもあるので，この計算結果の値と比較することにより，両者の違いを確認することができる．

付録 A の前半では，$n-1$ 次元実射影空間の任意の直線上において，基準となる原点，無限遠点，単位点を定めたとき，その直線上の任意の点の座標を与え

る複比の計算に，Cullis 行列式が利用できることを示す．後半では，余 Cullis 基底とプリュッカー座標との関係を説明し，k 次元射影の集合 $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ の射影幾何的な見方を余 Cullis 基底を用いて説明する．付録 B では，3.4 節の補足として，非退化な矩形行列の全体はスティーフェル多様体でもあるから，これをグラスマン多様体を底空間とする主ファイバー束と見ることにより，矩形行列の行列式の重みの違いが，このファイバーの違いとして捉えられ，さらに，Cullis 行列式 $\det_{n,k}$ は，グラスマン多様体 $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ 上で，$U(k)$ を構造群とする主ファイバー束から，$U(1)$ を構造群とする直線束への準同型として解釈することができる．付録 C では，4.2 節で使われる回転群 $SO(n)$ 上の規格化された不変積分を，そこで説明した $SO(3)$ の場合の考え方を一般化して求めている．付録 D は，本文で与えた問題の解答例である．付録 E ではミュール卿が 1930 年の書物 [11] で取り上げた Cullis のテキストに関する解説の訳を与えてある．付録 F では，数学が 1 つの形を整えるまでに，どれほど長い年月と大勢の人の努力があったかを知ってもらうために，行列式と行列の歴史的な経緯を手短に紹介した．この付録の最後に，関孝和らが行列式を発見する動機になった，シルベスターの終結式の説明をした．

上にも述べたように，ここで取り上げた Cullis の行列式は，イギリスの統計学者フェアブラザーズの論文 [4] において紹介され，柳井が 2005 年にマッギル大学の高根芳雄先生よりその文献を受け取ったことから始まっている．実は，この Cullis による書物は現在では大変貴重なもので，国内では，第 1 巻は東京大学の数理科学研究科（東京帝国大学理学部数学教室（大正 2 年 11 月 5 日）印付）および同生産技術研究所の図書室にしか保管されていない．

また，本書は，韓国のソウル国立大学で開かれた KOTAC 2008 において，中神が第 2 章以下の一部の概要を紹介した際に，荒木不二洋先生から「本にしておいた方が，誰かが面白い使い道を見つけてくれる可能性が高まる」と執筆を薦めて下さったことがきっかけになっている．また，もう一人の参加者安藤毅先生からは，帰国後，19 世紀から 20 世紀の初頭にかけての線形代数の結果をまとめた，ミュール卿による 2 冊のテキスト [10], [11] と，この種の文献の調べ方をご教示いただいた．このうち [10] は日本大学文理学部の図書館にあることがわかり，数学教室の神辺貴昭さんの，また [11] は立教大学数学教室にあることがわかり，佐藤信哉先生のご協力により見ることができ

た．これらの先生方の励ましとご協力に対して，心よりお礼を申し上げたい．

その後，荒木先生と畏友江口正義氏から，本書の初稿に対する貴重なご助言をたくさんいただき，大幅な書き直しをした．本書がまがりなりにも上梓できるようになれたのは，この献身的なご協力のお陰である．とくに，命題 3.5.2 は江口氏のご指摘により追加したものである．

なお，付録で行列式に関する歴史的部分を書くにあたっては，脚注に挙げたものの他に，文献 [4, 5, 14, 15, 16, 17, 18, 20] を利用させていただいた．これらの方々にもお礼を申し上げたい．

2011 年 11 月

中神祥臣
柳井晴夫

目　次

序　章　矩形行列の行列式って？

行列式は通常正方行列に対して考えられている．そこで，Cullis により導入された，正方でない縦長の矩形行列の行列式って一体何だろうか思われる方のために，定義に先だって，次数が低い場合の例をいくつか取り上げてみる．その結果，本書で解説しようとしている，矩形行列の行列式が，正方行列の行列式の自然な拡張になっていることがおわかりいただけると思う．定義などの詳細は主として線形代数の基礎的な結果を，本書の前半において準備してから，順を追って説明することにする．

n 次正方行列 A の行列式は，$\det_n(A)$ または行列の両側に縦棒を引いて表されるので，縦長の $n \times k$ 行列 $A = (a_{i,j})$ の場合にも同じように，その行列式を $\det_{n,k}(A)$ または行列の両側に縦棒を引いて

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,k} \end{vmatrix}$$

と表すことにする．

0.1　列数が 1 の場合

最初の $n \times 1$ 行列の行列式の値を

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i$$

と定める．例えば，

$$\det{}_{1,1}((a)) = a, \quad \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = a - b, \quad \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = a - b + c$$

となる．1×1 行列の場合は，両側に縦棒を引く記号は絶対値の記号と同じで紛らわしいので，上のような記述を選んでいる．

0.2　列数が 2 の場合

列数が 2 の縦長行列の行列式の計算法を説明する．

(i) 2×2 行列の場合には，通常の正方行列の行列式の計算と同じである．したがって，2×1 行列の行列式は正方行列を用いて

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}$$

と表せる．

(ii) 3×2 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

の行列式の値の計算の仕方には，つぎのように，第 1 列に関する展開を用いる方法，第 2 列に関する展開を用いる方法，正方行列による展開を用いる方法の 3 通りがある．

第 j 列に関する展開を用いる方法とは，行列 A の第 j 列の i 番目の成分 $a_{i,j}$ に，$\det{}_{3,2}(A)$ から i 行と j 列を除いた 2×1 小行列式に $(-1)^{i+j}$ 倍したものを掛け，第 j 列のすべての成分について足し合わせる計算をする．

第 1 列に関する展開

$$\det{}_{3,2}(A) = a\begin{vmatrix} d \\ f \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} b \\ f \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} b \\ d \end{vmatrix} = a(d-f) - c(b-f) + e(b-d)$$
$$= (ad + be + cf) - (af + bc + de).$$

第 2 列に関する展開

$$\det{}_{3,2}(A) = -b\begin{vmatrix} c \\ e \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a \\ e \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix} = -b(c-e) + d(a-e) - f(a-c)$$
$$= (ad + be + cf) - (af + bc + de).$$

正方行列による展開

行列 A の 3 つの行 $(a,b),(c,d),(e,f)$ のうち，2 つを選んで正方行列を作る方法は 3 通りある．その際，i 行と j 行 $(i<j)$ を組み合わせた場合には，その小行列式に $(-1)^{i+j+1}$ を掛け，すべての選び方について足し合わせて，計算をする．

$$\det{}_{3,2}(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix}$$
$$= (ad - bc) - (af - be) + (cf - de)$$
$$= (ad + be + cf) - (af + bc + de).$$

以上，3 つの計算法のどれを使っても同一の値が得られていることがわかる．また，この値の絶対値は，2 次元の直交座標において，行列の 3 つの行 $(a,b),(c,d),(e,f)$ を座標としてもつ 3 点を頂点にもつ三角形の面積の 2 倍である．

(iii) 4×2 行列

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

の行列式の値の計算法にも，3×2 行列の場合と同じように，第 1 列に関する展開，第 2 列に関する展開，2 次正方行列に関する展開の 3 通りがある．

第 j 列に関する展開に関しては，第 j 列の成分 $a_{i,j}$ に，$\det_{4,2}(B)$ から i 行と j 列を除いて得られる 3×1 小行列式に $(-1)^{i+j}$ 倍したものを掛け，第 j 列のすべての成分について足し合わせる計算をする．

第 1 列に関する展開

$$\det_{4,2}(B)=a\begin{vmatrix} d \\ f \\ h \end{vmatrix}-c\begin{vmatrix} b \\ f \\ h \end{vmatrix}+e\begin{vmatrix} b \\ d \\ h \end{vmatrix}-g\begin{vmatrix} b \\ d \\ f \end{vmatrix}$$

$$=a(d-f+h)-c(b-f+h)+e(b-d+h)-g(b-d+f)$$

$$=(ad+ah+be+cf+dg+eh)-(af+bc+bg+ch+de+fg).$$

第 2 列に関する展開も同じように計算することができる．

正方行列による展開

行列 B の 4 つの行 $(a,b),(c,d),(e,f),(g,h)$ のうち，2 つの行を選択する組み合わせは 6 通りある．i 行と j 行を組み合わせて得られる正方行列の行列式には $(-1)^{i+j+1}$ を掛け，すべての組み合わせについて足し合わせると，

$$\det_{4,2}(B)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$=(ad-bc)-(af-be)+(ah-bg)+(cf-de)$$

$$-(ch-dg)+(eh-fg).$$

この場合にも，結果の値が計算法によらず同一であることを確認することができる．

0.3　列数が 3 の場合

(i) 3×3 行列の場合には，正方行列の行列式の計算と同じである．

(ii) 4×3 行列

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

の場合には，第 1 列，第 2 列，または第 3 列に関する展開を用いる方法，正方行列による展開を用いる方法，さらにラプラス展開と呼ばれる方法が新たに 3 通り加わる．

第 j 列に関する展開に関しては，第 j 列の成分 $a_{i,j}$ に，$\det_{4,3}(C)$ から i 行と j 列を除いて得られる 3×2 小行列式に $(-1)^{i+j}$ 倍したものを掛け，第 j 列のすべての成分について足し合わせる．

第 1 列に関する展開

$$\det{}_{4,3}(C) = a\begin{vmatrix} e & f \\ q & r \\ t & u \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ q & r \\ t & u \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \\ t & u \end{vmatrix} - s\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \\ q & r \end{vmatrix}.$$

第 2 列または第 3 列に関する展開も同じようにできる．

正方行列による展開

行列 C の 4 つの行 $(a, b, c), (d, e, f), (p, q, r), (s, t, u)$ のうち，3 つの行を選択する組み合わせは 4 通りある．i 行と j 行と ℓ 行を組み合わせた行列式には $(-1)^{i+j+\ell}$ を掛け，すべての組み合わせについて足し合わせる．

$$\det{}_{4,3}(C) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ s & t & u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d & e & f \\ p & q & r \\ s & t & u \end{vmatrix}.$$

第 1 列と第 2 列に関するラプラス展開

4×3 行列 C の第 1 列と第 2 列を取り出して得られる 4×2 行列を考える．この行列の 4 つの行から第 i 行と第 j 行を選んで得られる部分正方行列の行列式と，$\det_{4,3}(C)$ から第 i 行と第 j 行，第 1 列と第 2 列を取り除いて得られる 2×1 小行列式に $(-1)^{i+j+1}$ 倍したものを掛け，i,j の 6 通りの可能性についてすべて加え合わせる．

$$\det{}_{4,3}(C) = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}\begin{vmatrix} r \\ u \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f \\ u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ s & t \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f \\ r \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} d & e \\ p & q \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c \\ u \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d & e \\ s & t \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f \\ u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s & t \\ p & q \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c \\ u \end{vmatrix}.$$

この他，第 1 列と第 3 列に関するラプラス展開や，第 2 列と第 3 列に関するラプラス展開についても同じような計算が可能になる．3×2 行列の場合と同じように，この場合の行列式の絶対値は，3 次元の直交座標において，行列の 4 つの行 $(a,b,c),(d,e,f),(p,q,r),(s,t,u)$ を座標としてもつ 4 点を頂点にもつ三角錐の体積の 6 倍である．

0.4　一般展開式

これまでの計算例でわかるように，矩形行列の行列式の計算法は，正方行列の場合に使われている計算法を発展させたものであることがわかる．しかし，展開ごとの符号の付け方には注意を払う必要がある．その点を明確にさせると，一般の縦長の $n\times k$ 行列 $A=(a_{i,j})$ の行列式は，k 次正方行列を使って，

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} (-1)^{\sum_{\ell=1}^{k}(i_\ell-\ell)} \begin{vmatrix} x_{i_1,1} & x_{i_1,2} & \cdots & x_{i_1,k} \\ x_{i_2,1} & x_{i_2,2} & \cdots & x_{i_2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i_k,1} & x_{i_k,2} & \cdots & x_{i_k,k} \end{vmatrix}$$

と展開されることがわかる．この式を矩形行列の行列式の定義式として採用することもできるが，本書ではそのような天下り的な記述は避けて，簡単な

場合から手順を踏んで帰納的に定義を与え，その結果として，この展開式が自然に導かれることを示す．

0.5 矩形行列の行列式の性質

$n \times k$ 行列 A の列ベクトルを左から $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ とすれば，行列 A は $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ と表せる．このとき，行列式 $\det_{n,k}(A)$ を

$$|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k|$$

と表すことにすると，行列式の一般展開式により，行列式はつぎのような基本性質を満たしていることがわかる．

列ベクトルに関する線形性と交代性と規格化条件

(i) j 列目以外はすべて $\boldsymbol{a}_i$ であるが，j 列目だけは $\boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}_j$ の行列に対しては，
$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k| = |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k| + |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k|$.

(ii) j 列目以外はすべて $\boldsymbol{a}_i$ であるが，j 列目だけは $c\boldsymbol{a}_j$ の行列に対しては，
$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k| = c|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k|$.

(iii) i 列目と異なる j 列目を入れ替えると，行列式の符号が変わる．

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k| = -|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_k|.$$

(iv) $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ $(i \neq j)$ ならば，$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k| = 0$.

(v) $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を基本ベクトルとする．このとき，$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ ならば，

$$\det((\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k})) = (-1)^{\sum_{j=1}^{k}(i_j - j)}.$$

ただし，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ とは i 番目の成分は 1，それ以外の成分はすべて 0 のベクトルである．

正方行列の行列式は，行ベクトルに関しても上と同様な性質が成り立つが，正方行列でない矩形行列の行列式の場合には，そのようなことはいえない．

矩形行列に 1 を成分とする列ベクトルを加えた場合の行列式

Cullis により得られた公式を紹介する．$k < n$ のとき，$n \times k$ 行列 A と，成分がすべて 1 の列ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}$ に対して，

$$\det{}_{n,k+1}((A, \widetilde{\mathbf{1}})) = \begin{cases} \det{}_{n,k}(A) & (n-k \text{ が奇数の場合}) \\ 0 & (n-k \text{ が偶数の場合}) \end{cases}.$$

例えば，

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \\ g & h & 1 \end{vmatrix} = 0$$

などが成り立つ．

0.6　矩形行列の行列式の応用例

一般逆行列への応用

統計学や工学では，未知数の個数と方程式の個数が違う場合にも，高階の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ の解 $\boldsymbol{x}$ または最小二乗の意味で最良な近似解 $\boldsymbol{x}$ を見つけたいことがある．その場合には，方程式 $ABA = A$ を満たす行列 B を用いると，ベクトル $B\boldsymbol{a}$ がそのような解を与えることが知られている．そこで，このような行列 B を A の一般逆行列と呼ぶ．もちろん，この B は一意的に決まるわけではないが，応用上はそれで十分なことが多い．

一般に，縦長の $n \times k$ 行列 A の行列式の値が 0 でない場合には，正方行列の場合に余因子行列を使って逆行列を求めるのと同じように，つぎの値

$$(-1)^{i+j} \frac{\det_{n-1,k-1}(A_{j,i})}{\det_{n,k}(A)}$$

を (i,j) 成分にもつ $k \times n$ 行列 B は，$BA = 1_k$ を満たすので，$ABA = A$ となり，A の（反射的最小ノルム型）一般逆行列になる．ただし，$A_{j,i}$ は A から第 j 行と第 i 列を取り除いて得られる $(n-1) \times (k-1)$ 行列であり，1_k は k 次単位行列である．

行列式の値が 0 であっても，$n \times k$ 行列 A が非退化な場合には，A が非退化であることと，n 次正方行列 $(A, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_{n-k}})$ が正則であるような添

え字 $j_1, \ldots, j_{n-k}$ が存在することは必要十分であるから，この n 次正方行列 $(A, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_{n-k}})$ には逆行列が存在する．そこで，その逆行列の上から k 行を取り出して得られる $k \times n$ 行列を B とすれば，B は $BA = 1_k$ を満たすことがわかる．したがって，この B も A の（反射的最小ノルム型）一般逆行列である．上のような性質をもつ添え字集合 $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$ は 1 組とは限らないので，添え字集合が変わるごとに新たな一般逆行列が見つかる可能性が高い．このような集合の可能性はたかだか $\binom{n}{k}$ であるから，すべての場合を調べてみてもそれほど大変ではない．簡単な例で試してみると，与えられた行列にもよるが，上のような添え字の集合は容易に見つけられる．

A が横長の行列の場合には，その随伴行列に対して，上の議論を適用し，求めた一般逆行列の随伴を考えれば，もとの横長の行列の（反射的最小二乗型）一般逆行列を得ることができる．

射影幾何への応用

2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ において，どの対も 1 次独立な 4 つのベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ に対して定まる 2 つの比

$$\det{}_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4) : \det{}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4), \quad \det{}_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) : \det{}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3)$$

の値を考え，さらにその比

$$\frac{\det{}_2((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3)) \det{}_2((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4))}{\det{}_2((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4)) \det{}_2((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3))}$$

の値をこれら 4 点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ の複比という．この複比の値の絶対値は

$$\frac{\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3\| \, \|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_4\|}{\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_4\| \, \|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3\|}$$

となる．

一般に，$n\,(\geq 3)$ 次元実ベクトル空間において，1 次元部分ベクトル空間全体のなす集合は $n-1$ 次元実射影空間になる．その際，各 1 次元部分ベクトル空間が，射影空間における「点」であり，2 次元部分ベクトル空間に含まれる 1 次元部分ベクトル空間全体のなす集合が，射影空間における「直線」である．複比は射影空間における「直線」上の相異なる 4「点」により決まる値になっている．したがって，その「直線」上で，最初の 3「点」を基準とな

る無限遠点，原点，単位点に選んだとき，複比は 4 番目の点の座標を与えている．その結果，射影空間における「直線」上にも，基準となる 3 点を定めることにより，座標を導入することができる．実は，Cullis 行列式を用いると，その複比の値が

$$\frac{\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3)) \det_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4))}{\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4)) \det_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3))}$$

により与えられる．分母が 0 になる場合には，これらのベクトルに n 次正則行列を同時に作用させ，0 でないようにすることができ，そのときの値は正則行列の選び方によらない．

ところで，$n \times 2$ 行列 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ の列ベクトルの張る平面（2 次元部分ベクトル空間）と $n \times 2$ 行列 $(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ の列ベクトルの張る平面は一致しているので，$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)B = (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ を満たす正則な 2 次正方行列 B が存在する．そこで，通常の射影幾何では，複比を行列 $B = (\lambda_{i,j})$ の成分を用いて $\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}/\lambda_{1,1}\lambda_{2,2}$ と定義する．もちろん，この値は上の値と一致している．

第1章　正方行列の行列式から矩形行列の行列式へ

まず，本書の随所に現れてくる基礎的用語の説明をしておく．

1.1　用語と記号の準備

1.1.1　集合と写像の用語

相互に識別のできるものの集まりを**集合**といい，ものをその集合の**元**または**要素**という．x が集合 A の元であることを $x \in A$，元でないことを $x \notin A$ で表す．便宜上，元がない集合も考え，これを**空集合**といい，$\emptyset$ で表す．例えば，自然数全体の集合は

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

のように，自然数の集まりの両側を中括弧でくくって表す．以後，簡単のためにこの集合を $\mathbb{N}$ で表す．同様に，整数全体，有理数全体，実数全体，複素数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ で表す．条件 $p(x)$ を満たす x 全体のなす集合を $\{x \mid p(x)\}$ で表す．例えば，$p(x)$ が「x は非負の実数である」という文章のときの集合は，$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ と表せる．この集合のように，$\mathbb{R}$ の一部からなる集合を $\mathbb{R}$ の部分集合という．この部分集合は $\mathbb{R}_+$ と表される．

集合演算にはつぎのような記号が使われる．

和集合　$A \cup B = \{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$

共通部分　$A \cap B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$

差集合　$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$

包含関係　$A \subset B \Leftrightarrow A$ の元はどれも B の元である

包含関係に関して最大の集合がはっきりしているときには，その集合 X を使って表される差集合 $X \setminus A$ を A の補集合といい，A^c で表す．

よく知られているように，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は直線上の座標として視覚的に表される．平面の点の座標も直交座標系を使って，x 座標 a と y 座標 b の対 (a,b) として表される．そこで，このような対全体の集合 $\{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}$ かつ $b \in \mathbb{R}\}$ を $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ で表し，2つの集合 $\mathbb{R}$ の直積という．一般に，集合 A と B が与えられたときに，それぞれの元の対 (a,b) 全体のなす集合 $\{(a,b) \mid a \in A$ かつ $b \in B\}$ を $A \times B$ で表し，A と B の直積または直積集合という．もっとたくさんの集合に対しても同じように直積を考えることができる．また，n 個の $\mathbb{R}$ の直積を $\mathbb{R}^n$ のようにも表す．

つぎに，$y = f(x)$ のような関数を考える．例えば，関数 $f(x) = \sqrt{x}$ は $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{R}_+$ 全体で定義されて，とる値も $\mathbb{R}$ の元である．一般に，これと同じような，集合 A の元から集合 B の元への対応 g を関数とはいわず，**写像**といい，$g: A \to B$ で表す．ただし，写像の場合には，とる値は1価であることを仮定しておく．

いま集合 A から集合 B への写像を g とする．A において互いに異なる元が g により必ず B の互いに異なる元に移されるとき，写像 g は**単射**（または，1対1）であるという．また A 全体が g により B 全体に移されるときには，写像 g は**全射**（または，上への写像）であるという．両方が成り立つときには，写像は**全単射**であるという．例えば，2つの集合

$$A = \{1,2,3\}, \quad B = \{a,b,c\}$$

に対して，$g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = c$ により与えられる A から B への写像 g は全単射である．全単射な写像のことを「写像」を省いて単に，全単射ということもある．2組の写像 $g: A \to B$ と $h: B \to C$ が与えられたとき，各 $a \in A$ に対し $h(g(a))$ とおいて得られる A から C への対応を h と g の**合成写像**といい，$h \circ g$ で表す．

1.1.2　ベクトルの話

平面または空間において，ベクトルの図形的な表示として矢印が使われる．

ベクトルとはこのような矢印の全体であるが，これらの中でも平行移動で互いに重なり合うものどうしは同一のベクトルと考える．これにより，ベクトルに対して，よく知られた加法と定数倍（スカラー倍）の演算を与えることができる．いま，平面または空間に直交座標を与えて固定する．このとき，同一ベクトルを与える矢印の全体（同値類）の中から，原点を出発点にもつ矢印を取り出し，これを位置ベクトルと名付け，その矢印の先端の点の座標をそのベクトルの成分として考える．そのために，しばしば，位置ベクトルとその先端の座標とを同一視して扱う．以下の議論ではこのような位置ベクトルを単にベクトルと呼んでいる．

1.2 ベクトルと行列

ここでは n 次元のベクトル空間におけるベクトルを，とくに断らない限りは，縦ベクトルとして扱う．横ベクトルはこの章でも使われるが，その役割については，第 2 章へ行ってから詳しく述べる．

1.2.1 ベクトルの基本事項

n 個の実数または n 個の複素数を次のように縦 1 列に並べたものを n 次**縦ベクトル**（または**列ベクトル**）という．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，a_i を i 番目の座標にもつ直積集合 $\mathbb{R}^n$ の点 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と対応させ，これを $\boldsymbol{a}$ の直交座標と考えることにより，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の視覚的表示を得ることができる．逆に直積集合 $\mathbb{R}^n$ の点の成分を縦に並べ替えることにより，縦ベクトルが得られるので，今後は，縦ベクトルと対応する直交座標とを同一視して扱う．また，第 1 章では 1.5 節の 1.5.2 項までは，縦ベクトルの数としてはすべて実数の場合だけを扱うので，このよ

うなベクトル全体のなす集合を直積集合と同じ記号 $\mathbb{R}^n$ で表し，n 次元**実ベクトル空間**または短く n 次元**ベクトル空間**という．また，縦ベクトル $\boldsymbol{a}$ の各成分を横に並べ替えたものを，

$$^t\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

と表し，n 次**横ベクトル**（または**行ベクトル**）という．この横ベクトル $^t\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}$ の**転置ベクトル**という．

同じように，横ベクトル $^t\boldsymbol{a}$ に対してもとの縦ベクトル $\boldsymbol{a}$ を横ベクトル $^t\boldsymbol{a}$ の**転置ベクトル**といい，$^t(^t\boldsymbol{a})$ で表す．$\boldsymbol{a} = {}^t(^t\boldsymbol{a})$ である．

横ベクトルの成分表示は縦ベクトルの直交座標（直積集合 $\mathbb{R}^n$ の元）と同じ表記が使われていて紛らわしいので，とくに断らない限り，この表記はもっぱら横ベクトルに対して用いることにする．

上記の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の**成分**と呼ばれ，上述のように，第1章を通しては，最後の1.5節を除き，すべて実数とする．(なお，第2章以降で取り扱うベクトルの成分は，断らない限り，複素数とする.)

ベクトルに対しては，つぎの加法と定数倍（スカラー倍）の演算ができる．

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad c\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}.$$

とくに，縦ベクトル $\boldsymbol{a}$ を -1 倍したものを $-\boldsymbol{a}$ で表す．

つぎに n 次縦ベクトル $\boldsymbol{a}$ についてその大きさを

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

により定義する．これは，$\mathbb{R}^n$ において，原点から点 $(a_1, \ldots, a_n)$ までの距離を表し，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の**ノルム**と呼ばれる．(1.5.2項以降の複素数を成分にもつベクトルの場合には，右辺の平方根の中の各項は成分の平方 a_i^2 の代わりに，成分の絶対値の平方 $|a_i|^2$ が使われ，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2}$ となる.) また，$\|\boldsymbol{a}\| = 0$ が成り立つとき，すなわち，すべての成分が $a_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ のとき，このようなベクトルを**零ベクトル**と呼び，$\mathbf{0}$ で表す．このとき，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, \quad -\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}, \quad 0\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

が成り立つ．また，長さが1のベクトルを**単位ベクトル**（または**規格ベクトル**）という[1]．

横ベクトルに対しても，加法と定数倍を

$${}^t\boldsymbol{a}+{}^t\boldsymbol{b}={}^t(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}), \quad c\,{}^t\boldsymbol{a}={}^t(c\boldsymbol{a})$$

で定義し，縦ベクトルの場合と同じように，ノルム，零ベクトル，単位ベクトルなどの概念を定義する．

問題 1 2次ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，ベクトル $\boldsymbol{x}$ が2つの異なるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を結ぶ直線上に載っているための必要十分条件は $\boldsymbol{x}=(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ を満たす実数 λ が存在することであることを示せ．

定義 1.2.1 2つの n 次ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して，その**内積**が

$$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

によって定義される．

内積については，

(i) $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a})\geq 0$ かつ等号が成立することは $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ と同値である．

(ii) $(\boldsymbol{a}|c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2)=c_1(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}_1)+c_2(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}_2)$.

(iii) $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a})$.

が成立する[2]．（ベクトルの成分が複素数の場合には，1.5.3 項でも説明するように，内積の定義は，上の定義式の右辺の現れる各項 a_ib_i を $\overline{a_i}b_i$ に置き換えた式 $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})=\overline{a_1}b_1+\overline{a_2}b_2+\cdots+\overline{a_n}b_n$ により与えられる．したがって，内積の性質 (iii) は $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})=\overline{(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a})}$ となる.）また，$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a})=\|\boldsymbol{a}\|^2$ が成立するから，つぎの式

$$\|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2\pm 2(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})+\|\boldsymbol{b}\|^2$$

---

[1] 単位ベクトルを正規ベクトルということもあるが，3.5 節において，幾何学で使われている正規 (normal) ベクトルという用語を用いるので，ここでは規格 (normalized) ベクトルという用語を使う．

[2] 内積をもつ一般的なベクトル空間の定義は第 2 章の定義 2.1.11 において与える．

が成り立つ．n 次元ベクトル空間の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を表す 2 点の直交座標がそれぞれ $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ であるとき，

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

となるので，この値はこれら 2 点間の距離を与えている．

次の不等式は重要である．

(i) $|(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})| \leq \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|$.

(ii) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$.

(i) は**シュワルツの不等式**，(ii) は**三角不等式**と呼ばれている．零ベクトルでない $\boldsymbol{a}$ に対して，(i) で等号が成り立つのは，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ の定数倍であるときに限る．

問題 2　シュワルツの不等式を用いて，三角不等式を示せ．

問題 3　$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = 4(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ を示せ．

零ベクトルではない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積が $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = 0$ を満たすとき，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は**直交する**といい，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ で表す．2 つのベクトルが直交しているときには，ピタゴラスの定理

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

が成り立つ．

問題 4　2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ の場合には，方程式 $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ のなす集合は直線であることを示し，原点からこの直線までの距離を求めよ．

問題 5　n 次元ベクトル空間における 3 つの単位ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して，$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}|\boldsymbol{c}) = 1/2$ ならば，$-1/2 \leq (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{c}) \leq 1$ となることを示せ．

定義 1.2.2　n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において，i 番目の成分だけが 1 で他の $n-1$ 個の成分すべてが 0 の縦ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ で表す．このとき，集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の**自然基底**といい，その各ベクトルを**基本ベクトル**という．

基本ベクトルは，$(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = \delta_{i,j}$ を満たすので，長さは 1 で，互いに直交していることがわかる．ただし，$\delta_{i,j}$ は**クロネッカーのデルタ**と呼ばれ，$i = j$ のときには 1，$i \neq j$ のときには 0 という値をとる記号である．i 番目の成分が a_i で与えられるベクトルは $\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i$ と表せる．

1.2.2 行列とは

一般に nm 個の実数を次のように長方形に並べたものを**行列**という．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

上記の行列において，数字の横の並びは**行**，縦の並びは**列**と呼ばれ，n 個の行ベクトルと m 個の列ベクトルを含むものを，$\boldsymbol{n \times m}$ **行列**という．i 番目の行と j 番目の列の交差点にある数 $a_{i,j}$ を行列 A の $\boldsymbol{(i,j)}$ **成分**という．行列 A の第 i 番目の行，および第 j 番目の列

$$(a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \ldots \quad a_{i,m}), \qquad \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

を，行列 A の**第 $\boldsymbol{i}$ 行**の行ベクトル，**第 $\boldsymbol{j}$ 列**の列ベクトルといい，それぞれ，上付きの添え字 i と下付きの添え字 j を用いて，$\boldsymbol{a}^i$, $\boldsymbol{a}_j$ で表すことにすれば，行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \boldsymbol{a}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_m) = (a_{i,j})$$

と表せる．

これまで行ベクトルを記述する際には，成分どうしの間にコンマを入れたが，$1 \times n$ 行列の場合にはコンマを入れていない．しかし，今後はこれらを同一視してコンマを入れることが多い．行列の場合にも，

$$(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_m) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$$

のような書き方をする．

問題 6　n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ に対して，つぎの不等式を示せ．

$$\|A\boldsymbol{x}\| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}\|\boldsymbol{x}\|.$$

1.2.3　さまざまな行列

行列は成分の並び方や値により，さまざまな名称が与えられている．

正方行列と矩形行列

行数 n と列数 m が等しい行列を**正方行列**（より詳しく，$\boldsymbol{n}$ **次正方行列**）と呼ぶ．一方，n と m が必ずしも等しくない行列を**矩形行列**と呼ぶ．すべての成分が 0 の行列を**零行列**と呼び，紛らわしいが，同じ記号 0 を用いて表す．

対角行列と単位行列

非対角成分がすべて 0 の行列

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

を**対角行列**と呼び

$$\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

とも表す．すべての対角成分 d_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ が 1 の対角行列は n 次**単位行列**と呼ばれ，1_n と書かれる．基本ベクトルを用いると n 次の単位行列は

$$1_n = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$$

となる．例えば，3 次の単位行列はつぎのように表される．

$$1_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \mathrm{diag}(1, 1, 1).$$

行列単位

n 次正方行列のうち，(i, j) 成分は 1 でそれ以外の成分はすべて 0 の行列を**行列単位**といい，$E_{i,j}$ で表す．

部分行列

$n = p+p'$, $m = q+q'$ のとき，$p\times q$ 行列 $A = (a_{i,j})$, $p\times q'$ 行列 $B = (b_{i,j})$, $p' \times q$ 行列 $C = (c_{i,j})$, $p' \times q'$ 行列 $D = (d_{i,j})$ の成分をそのまま用いて得られる $n \times m$ 行列

$$X = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,q'} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} & b_{p,1} & \cdots & b_{p,q'} \\ c_{1,1} & \cdots & c_{1,q} & d_{1,1} & \cdots & d_{1,q'} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{p',1} & \cdots & c_{p',q} & d_{p',1} & \cdots & d_{p',q'} \end{pmatrix}$$

を

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

と略記する．行列 X からいくつかの行と列を取り除いて得られる行列を，X の**部分行列**という．A, B, C, D は X の部分行列である．とくに，$p \times q$ 行列 A と $p \times q'$ 行列 B をこの順に並べて得られる $p \times (q + q')$ 行列を $(A\ \ B)$ の代わりに (A, B) で表す．

1.2.4　行列の基本演算

$n \times 1$ 行列を列ベクトル，$1 \times n$ 行列を行ベクトルと見ることができる．そこで，行列に対してもベクトルと同じように加法と定数倍の演算を考えることができる．

行列の加法と定数倍

同じ行数と同じ列数をもつ行列に対しては，加法と定数倍をつぎのように，列ベクトルごとの和と定数倍を考えることにより，

$$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m) + (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m + \boldsymbol{b}_m),$$
$$c(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m) = (c\boldsymbol{a}_1, \ldots, c\boldsymbol{a}_m)$$

と行うことができる．例えば，同じ行数と列数をもつ2つの 2×3 行列を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，A の各成分と B の対応する各成分の和を，新たな成分とする行列を行列の和といい，この演算を**加法**と呼ぶ．

$$A+B=\begin{pmatrix}3+5 & 6+5 & 8+8\\ 2+6 & 5+8 & 1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 11 & 16\\ 8 & 13 & 3\end{pmatrix}.$$

また，2×3 行列 A の各成分を 2 倍した行列はつぎのようになる．

$$2A=\begin{pmatrix}6 & 12 & 16\\ 4 & 10 & 2\end{pmatrix}.$$

このような演算を**定数倍**といい，後に定義する積と区別して，**スカラー倍**という言い方もする．以後 $(-1)A$, $A+(-1)B$ などはそれぞれ $-A$, $A-B$ と表す．例えば，

$$A-B=\begin{pmatrix}3-5 & 6-5 & 8-8\\ 2-6 & 5-8 & 1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

である．

ここで，加法と定数倍に対して成り立つ性質をまとめておく．

定理 1.2.3　行列の和と定数倍はつぎの性質を満たす．

(i)（結合法則）　$(A+B)+C=A+(B+C)$.

(ii)（交換法則）　$A+B=B+A$.

(iii)（分配法則）　$c(A+B)=cA+cB$.

(iv)（分配法則）　$(c+d)A=cA+dA$.

(v)（結合法則）　$c(dA)=(cd)A$.

行列の積

1.2.1 項のように，n 次列ベクトル $\boldsymbol{a}$ の転置ベクトルを ${}^t\boldsymbol{a}$ で表すことにする．このとき，この n 次行ベクトルと新たな n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}$ の積 ${}^t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を，

$$ {}^t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{j=1}^{n}a_jb_j $$

で定義する．実ベクトル空間の場合には，この値は内積 $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ の値と一致するが，複素ベクトルの場合の内積とは一致しない．

つぎに，$n \times \ell$ 行列 $A = (a_{i,j})$ と $\ell \times k$ 行列 $B = (b_{i,j})$ の場合には，それぞれの ℓ 次元行ベクトルと ℓ 次元列ベクトル

$$\boldsymbol{a}^i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,\ell}) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\boldsymbol{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{\ell,j} \end{pmatrix} \quad (j = 1, \ldots, k)$$

を用いて，

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \boldsymbol{a}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^n \end{pmatrix}, \quad B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$$

と表せるので，行列の積 AB を (i,j) 成分が $\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{b}_j = \sum_{\alpha=1}^{\ell} a_{i,\alpha} b_{\alpha,j}$ で与えられる $n \times k$ 行列

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}^1 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}^1 \cdot \boldsymbol{b}_k \\ \boldsymbol{a}^2 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}^2 \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}^2 \cdot \boldsymbol{b}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}^n \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}^n \cdot \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}^n \cdot \boldsymbol{b}_k \end{pmatrix}$$

として定義する．

一般に，2つの行列 A と B が与えられたときに，A の列数と B の行数が上のように一致している場合には，積 AB を定義することができるが，一致していない場合には積を定義することはできない．

例えば，つぎの 2×3 行列と 3×3 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

の積は

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 3+6\cdot 2+8\cdot 1 & 3\cdot 2+6\cdot 3+8\cdot 2 & 3\cdot 1+6\cdot 1+8\cdot 3 \\ 2\cdot 3+5\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 2+5\cdot 3+1\cdot 2 & 2\cdot 1+5\cdot 1+1\cdot 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 29 & 40 & 33 \\ 17 & 21 & 10 \end{pmatrix}$$

となるが，C と A の積 CA は定義されない．同様に，2×3 行列

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

と上に与えた C との積は

$$BC = \begin{pmatrix} 5\cdot 3+5\cdot 2+8\cdot 1 & 5\cdot 2+5\cdot 3+8\cdot 2 & 5\cdot 1+5\cdot 1+8\cdot 3 \\ 6\cdot 3+8\cdot 2+2\cdot 1 & 6\cdot 2+8\cdot 3+2\cdot 2 & 6\cdot 1+8\cdot 1+2\cdot 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 33 & 41 & 34 \\ 36 & 40 & 20 \end{pmatrix}$$

となる．このとき，つぎの式が成立することが確かめられる．

$$(A+B)C = AC + BC.$$

行列 A が $n\times k$，行列 B が $k\times \ell$，行列 C が $\ell\times m$ の場合には，A と B の積 AB が $n\times \ell$ 行列となり，AB と C の積 $(AB)C$ が $n\times m$ 行列として定義される．同様に，B と C の積 BC は $k\times m$ 行列となり，A と BC の積 $A(BC)$ が定義される．このとき，

$$(AB)C = A(BC)$$

が成立するので，以後，この行列を括弧を省いて ABC と表す．

ここで行列の積の満たす性質をまとめておく．

定理 1.2.4

(i) （結合法則） $(AB)C = A(BC)$.

(ii)（分配法則） $A(B+C)=AB+AC$.

(iii)（分配法則） $(A+B)C=AC+BC$.

(iv)（結合法則） $(cA)B=A(cB)=c(AB)$.

問題 7　上の定理を証明せよ．

結合法則を繰り返し使うことにより，行列 n 個の積 $A_1A_2\cdots A_n$ において，どの順番で隣り合う行列の積を計算して行っても，同一の結果が得られるので（例えば，$((A_1A_2)A_3)A_4=(A_1(A_2A_3))A_4=A_1((A_2A_3)A_4)=A_1(A_2(A_3A_4))$），積は括弧を付けずに $A_1A_2\cdots A_n$ と書く．とくに，$A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ の場合，A^n と書く．

問題 8　n 次の正方行列 A が零行列でない場合でも，$A^n=0$ $(n=2,3,\ldots)$ となる行列が存在することを示せ．

行列単位を使うと，任意の行列 $A=(a_{i,j})$ は $\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}E_{i,j}$，対角行列 $\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n)$ は $\sum_{i=1}^{n}d_iE_{i,i}$ と表せる．行列単位はつぎの性質を満たしている．

(i) $E_{i,j}E_{k,\ell}=\delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

(ii) $\sum_{i=1}^{n}E_{i,i}=1_n$.

問題 9　2つの行列

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&0&1&1\\-1&-1&0&1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}$$

に対して，A^2 と B^2 を計算せよ．

問題 10　$\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ における行列単位を用いて，$S=E_{n,1}+\sum_{i=1}^{n-1}E_{i,i+1}$ とする．このとき，

(i) 行列 S^2 を求めよ．

(ii) 行列

$$\begin{pmatrix} x_n & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_n & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

は $\sum_{k=1}^{n} x_k S^k$ と表せることを示せ.

行列の転置

行列 A の縦と横を入れ替えて得られる行列を**転置行列**といい，${}^tA$ で表す[3]. つまり，$A=(a_{i,j})$ が $n\times m$ 行列の場合に，(i,j) 成分 $a_{i,j}$ を (j,i) 成分とする $m\times n$ 行列のことである．例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

のとき，その転置行列は,

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．A が正方行列の場合，$A={}^tA$ を満たす行列を**対称行列**，$A=-{}^tA$ を満たす行列を**交代行列**と呼ぶ．例えば，問題 9 の行列は交代行列である．交代行列の対角成分はつねに 0 となる．

問題 11 正方行列は対称行列と交代行列の和に表せることを示せ.

行列 A とその転置行列 ${}^tA$ の積は，積の順番の違いにより $A\,{}^tA$, ${}^tAA$ と 2 通り考えられる．例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

の場合，その転置行列は

$${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] 行列 A の転置行列を ${}^tA$ の代わりに A^t と表すこともある.

となるので，その2つの積はそれぞれ

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} 109 & 44 \\ 44 & 30 \end{pmatrix}, \quad {}^tA\,A = \begin{pmatrix} 13 & 28 & 26 \\ 28 & 61 & 53 \\ 26 & 53 & 65 \end{pmatrix}$$

となる．和と積が定義可能な任意の矩形行列 A, B についてつぎの性質が成立する．

(i) ${}^t(cA + dB) = c\,{}^tA + d\,{}^tB$.

(ii) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

(iii) ${}^t({}^tA) = A$.

正方行列の逆行列

定義 1.2.5　n 次正方行列 A に対して，

$$AB = CA = 1_n$$

を満たす n 次正方行列 B, C が存在するとき，A は**正則**であるという．

この場合には，結合法則により，

$$B = 1_nB = (CA)B = C(AB) = C1_n = C$$

が成り立つ．そこで，この B を A の**逆行列**といい，A^{-1} で表す．後に，系 1.3.13 の (iii) において，

> n 次正方行列 A, B が $AB = 1_n$ または $BA = 1_n$ を満たせば，A は正則で，B はその逆行列である

ことが示される．

つぎに，逆行列が満たす性質を挙げておく．

(i) A が正則行列ならば，その逆行列も正則で，$(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) A, B がともに正則行列ならば，AB も正則行列で，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成り立つ．

(iii) A が正則行列ならば，その転置行列も正則で，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

例 1.2.6　行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよう．そのためには，$AB = 1_2$ を満たす 2 次行列

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

を求めればよい．

$$AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$$

となるから，$AB = 1_2$ の成分を使って書くと，2 組の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

が得られる．最初の式から x と z を求めると，

$$(ad - bc)x = d, \quad (ad - bc)z = -c.$$

2 番目の式から y と w を求めると，

$$(ad - bc)y = -b, \quad (ad - bc)w = a.$$

ゆえに，$ad - bc \neq 0$ の場合には，A の逆行列 B がつぎのように書ける．

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

これで，2 次の正方行列の逆行列を求めることは，2 元連立 1 次方程式を解くことに帰着されることがわかる．同時に，$ad - bc = 0$ の場合には，$AB = 1_2$ を満たす B の存在を仮定した議論に矛盾が生じるので，$AB = 1_2$ を満たす B は存在しない．

例 1.2.7　**座標軸の回転**：2 次元平面において，xy-直交座標で，点 (x, y) を表すベクトルは $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ で与えられる．xy-直交座標を θ だけ回転して得

られる直交座標を，$x'y'$-直交座標とする．このとき，x' 軸と y' 軸は直交する規格ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2' = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

により与えられる．このとき，$x'y'$-直交座標の点 (x', y') を表すベクトルは $x'\boldsymbol{e}_1' + y'\boldsymbol{e}_2'$ で与えられる．これら 2 つの座標が表す点が同一である場合には，

$$x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = x'\boldsymbol{e}_1' + y'\boldsymbol{e}_2'$$

となるから，行列 $U(\theta) = (\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2')$ を用いて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = U(\theta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表される．この行列は同一の平面内での回転を与えている．

折り返し：x 軸に関する折り返しは

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表されるが，同一平面内の変換ではない．この行列を使うと，上に述べた x' 軸に関する折り返しは，行列

$$U(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

により与えられる．

問題 12　次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

この問題の 2 番目の行列は，$\mathbb{R}^2$ において，図 1.1 のように，任意の零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ を θ だけ正の方向に回転させる変換であり，3 番目の行列は任意の零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ を軸 $\mathbb{R}(\boldsymbol{e}_1 + \tan(\theta/2)\boldsymbol{e}_2)$ に関して折り返す変換である．

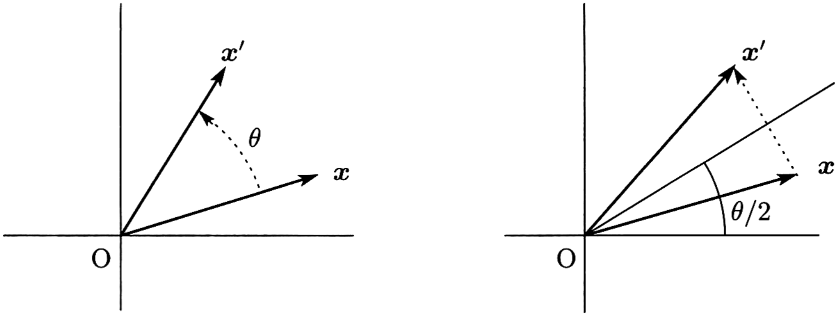


図 **1.1** 回転と折り返し.

行列と線形変換

行列の最も重要な役割は，空間における線形変換としての役割である．m 次列ベクトル $\sum_{i=1}^{m} x_i \boldsymbol{e}_i$ を $m\times 1$ 行列 $\boldsymbol{x}$ と見なして，$n\times m$ 行列 $A=(a_{i,j})$ を左からこの $m\times 1$ 行列に掛けると，行列の積の演算により $n\times 1$ 行列が得られる.

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1,j}x_j \\ \sum_{j=1}^{m} a_{2,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{n,j}x_j \end{pmatrix}.$$

これを n 次列ベクトルと見なすと，行列 A は m 次元ベクトル空間から n 次元ベクトル空間への変換を与えることがわかる．行列 A が零行列であることと，m 次元ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が成り立つことは必要十分である.

行列の積の演算から直ちに

$$A(c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y}) = cA\boldsymbol{x}+dA\boldsymbol{y}$$

が成り立つので，行列 A はベクトルの加法と定数倍の演算を保存する変換であることがわかる．一般に，このように，ベクトルの加法と定数倍を保存する変換を**線形変換**という.

逆に，$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形変換 A はつぎのように $(\boldsymbol{e}_i|A\boldsymbol{e}_j)$ を (i,j) 成分

にもつ $n \times m$ 行列

$$A' = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}_1|A\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_1|A\boldsymbol{e}_2) & \cdots & (\boldsymbol{e}_1|A\boldsymbol{e}_m) \\ (\boldsymbol{e}_2|A\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2|A\boldsymbol{e}_2) & \cdots & (\boldsymbol{e}_2|A\boldsymbol{e}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{e}_n|A\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_n|A\boldsymbol{e}_2) & \cdots & (\boldsymbol{e}_n|A\boldsymbol{e}_m) \end{pmatrix}$$

と同一視することができる[4]．実際，$A\boldsymbol{e}_j$ は縦ベクトルであるから，$\sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{e}_j$ と表せる．したがって，$(\boldsymbol{e}_i|A\boldsymbol{e}_j) = a_i$ となり，

$$A\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{e}_i|A\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_i$$

と表せる．いま，任意の $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} x_j \boldsymbol{e}_j \in \mathbb{R}^m$ に対して，

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \sum_{j=1}^{m} x_j A\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_j (\boldsymbol{e}_i|A\boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{\sum_{j=1}^{m} (\boldsymbol{e}_i|A\boldsymbol{e}_j) x_j\} \boldsymbol{e}_i = A'\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となる．

1.3　正方行列の行列式

本書の主題は行列式である．そこで，正方行列 A に対して，実数に値をとる行列式と呼ばれる関数を考えることにする．この関数の定義には，天下りに定理 1.3.3 の式で与える方法 [3, 13]，n 元連立 1 次方程式の解が，クラメールの式として表せるように，定義していく方法 [12] の他に，次数が 1 の場合を定義し，これを基に一般の場合を帰納的に定義する方法 [1] などがある．本書でも最終的にはすべて取り上げることになるが，ここでは歴史的発展に沿った 3 番目の手順で始める[5]．

---

[4] $\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ それぞれの自然基底に同じ記号が使われているので注意してほしい．
[5] 行列式の発見者である関孝和，田中由真達の定義もこのように帰納的に与えられていた．

1.3.1　正方行列の行列式の定義

行列式の定義に先立って，行列式を記述するときの記号の説明から始める．n 次正方行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (a_{i,j})$ の行列式を $\det{}_n(A)$，または列ベクトルを用いて $|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$，または行列成分を用いて

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

で表す．

教科書によっては，行列 A の行列式を $|A|$ のように表すこともあるが，本書では，1.5.5 項および第 2 章以降で，この記号を行列または線形変換の絶対値と呼ばれる新たな行列または線形変換に対して使うので，行列式の記号としては使わない．

定義 1.3.1　(i) 1 次正方行列 $X = (x)$ の行列式の値を

$$\det{}_1(X) = x$$

で定義する．

(ii) n 次正方行列 $X = (x_{i,j})$ の行列式の値を，X から第 i 行と第 1 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列 $X_{i,1}$ の行列式の値 $\det{}_{n-1}(X_{i,1})$ を用いて，帰納的に，

$$\det{}_n(X) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{i,1} \det{}_{n-1}(X_{i,1})$$

により定義する．

この定義に従って 2 次正方行列と 3 次正方行列の行列式の値を求めてみよう．

2 次行列式の値

2 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ の行列式の値は

$$\begin{aligned}\det{}_2(A) &= \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}a_{i,1}\det{}_1(A_{i,1})\\ &= a_{1,1}\det{}_1(A_{1,1}) - a_{2,1}\det{}_1(A_{2,1})\\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.\end{aligned}$$

これで，2 次正方行列の行列式の計算は，行列の対角成分の積から逆対角成分の積を引けばよいことがわかる．

問題 13　(i) つぎの行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(ii) 問題 12 の行列の行列式の値を求めよ．

2 次行列式の幾何学的意味

2 次の正方行列 A が対角行列 $\mathrm{diag}(d_1, d_2)$ の場合には

$$A\boldsymbol{e}_1 = d_1\boldsymbol{e}_1, \quad A\boldsymbol{e}_2 = d_2\boldsymbol{e}_2$$

となる．このとき，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は，行列 A によりそれぞれベクトル $d_1\boldsymbol{e}_1$ と $d_2\boldsymbol{a}_2$ に移されるので，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ により張られる単位正方形は，$\boldsymbol{e}_1$ 方向には d_1 倍，$\boldsymbol{e}_2$ 方向には d_2 倍した長方形に移されることがわかる．行列式の値が負になるのは，d_1 と d_2 のいずれかが負の場合であるが，そのときには，最初の正方形が裏返って写像されていることがわかる．

2 次の行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (a_{ij})$ の場合には

$$A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_2$$

となっているから，行列 A は 2 つのベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を 2 辺にもつ平行四辺形，つまり単位面積をもつ正方形を，2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺にもつ平行四辺形へ変換していることがわかる．

そこで，この平行四辺形の面積 S を求めてみよう．ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ がなす角度を θ とすると，平行四辺形の底辺の長さは $\|\boldsymbol{a}_1\|$ で高さは $\|\boldsymbol{a}_2\|\sin\theta$ であるから，

$$S^2 = \|\boldsymbol{a}_1\|^2(\|\boldsymbol{a}_2\|\sin\theta)^2 = \|\boldsymbol{a}_1\|^2\|\boldsymbol{a}_2\|^2(1-\cos^2\theta)$$

$$= \|\boldsymbol{a}_1\|^2\|\boldsymbol{a}_2\|^2 - (\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2)^2$$
$$= (a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2)(a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2) - (a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2})^2$$
$$= (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})^2 = |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2|^2$$

となる．したがって，行列式 $|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2|$ の値は，2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ における原点 O と点 $\mathrm{P}_1 = (a_{1,1}, a_{2,1})$ を結ぶ線分と，原点 O と点 $\mathrm{P}_2 = (a_{1,2}, a_{2,2})$ を結ぶ線分を 2 辺とする平行四辺形 $\mathrm{OP_1P_3P_2}$ の面積，または面積にマイナス符号をつけたものに等しくなる．ただし，P_3 は平行四辺形の残りの頂点である．つまり，行列 A により線形変換を受けた図形の面積が，もとの図形の面積の何倍になっているかを表す量が，行列式の値の絶対値になっていて，符号は，$\boldsymbol{a}_1$ から $\boldsymbol{a}_2$ への正の向きに測った角が π 以下のときには +，π 以上のときには − となっている．

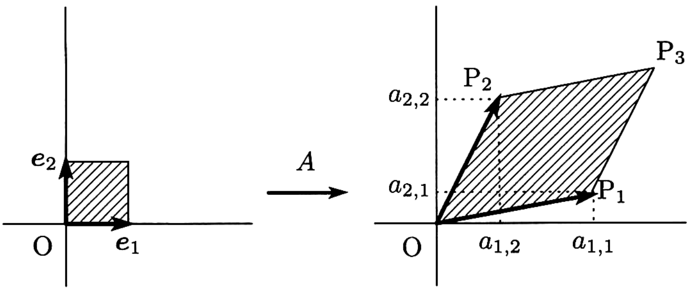


図 1.2　行列式の幾何学的意味．

問題 14　平面上で，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ を表す位置ベクトルがそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ のときに，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ が平行であることと，$|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2| = 0$ は同値であることを示せ．

3 次行列式の値

3 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ の行列式の値は

$$\det{}_3(A) = \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+1}a_{i,1}\det{}_2(A_{i,1})$$
$$= a_{1,1}\det{}_2(A_{1,1}) - a_{2,1}\det{}_2(A_{2,1}) + a_{3,1}\det{}_2(A_{3,1})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\
&= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3}) - a_{2,1}(a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{1,3}) \\
&\qquad + a_{3,1}(a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3}) \\
&= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\
&\qquad - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}.
\end{aligned}
$$

この右辺は**サラスの展開式**と呼ばれている.

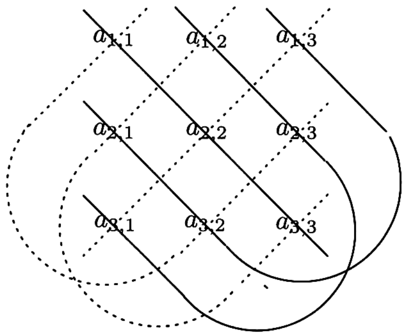


図 1.3　$\det{}_3(A)$ の展開式の求め方.

問題 15　つぎの行列式の値を求めよ.

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.
$$

3 次行列式の成り立ち

3 次行列式を展開した各項には，各列から 1 つずつ違った行の成分を取り出し，それらをすべて掛け合わせたものが現れていることがわかるが，その符号の付け方はよくわからない．そこで，各項を列の順番に従って

$$
a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}a_{\sigma(3),3}
$$

と書き表してみる．このとき，行を表す添え字 $(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3))$ が

$$(1,2,3),\quad (2,3,1),\quad (3,1,2)$$

ならば，符号は $+$ であるし，

$$(1,3,2),\quad (2,1,3),\quad (3,2,1)$$

ならば，符号は $-$ となっている．その理由はいろいろ考えられるが，行列式の定義にはつぎのような考え方が使われる．

> $(1,2,3)$ を並べ替えて，$(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3))$ となるときに，2 つの数を入れ替える回数が偶数回のときには，$a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}a_{\sigma(3),3}$ の符号は $+$，奇数回のときには $-$ とする．

上記 3 つずつの整数をまとめた 6 組の添え字は，3 個の整数の組 $(1,2,3)$ を並べ替えたもので，$(1,2,3)$ の**順列**または**置換**といわれる．このとき，(i_1,i_2,i_3) は並べ替えるときの写像 $\sigma : k \mapsto i_k$ $(k=1,2,3)$ とも同一視でき，これを

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix}$$

と表す．この表示は，行数 2 の行列の表し方と紛らわしいが，前後の文脈から混乱する心配はない．

1.3.2 n 次正方行列の行列式の値

3 次正方行列の行列式の値を，行列の成分を用いて求めるときには，展開式に現れる各項の符号が問題になることがわかった．したがって，n 次正方行列の行列式を求める場合にも，与えられた行列の各列から 1 つずつ違った行の成分を取り出し，それらを掛け合わせたものがすべて現れる．そこで，各項の行の番号を列の順番に従って並べ替えたときの符号の付け方が問題になってくる．その説明をするための準備から始める．

n 次対称群 S_n の符号

ここでは，高い次数の行列式の計算に現れる符号を定義するときに必要と

なる，新たな用語の準備をする．

列 $(1,2,\ldots,n)$ を並べ替えて得られる列 $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ を $(1,2,\ldots,n)$ の順列または置換といい，このような順列全体のなす集合を S_n で表す．このとき，順列 $(i_1,\ldots,i_n)$ は，上で $n=3$ の場合に述べたように，並べ替えるときの写像 $\sigma: k \mapsto i_k$ $(k=1,\ldots,n)$ とも同一視することができ，そのように扱われることも多い．

2つの写像 σ と σ' をこの順に続けて行うと，新たな順列が得られるので，それを $\sigma'\cdot\sigma$ で表し，これを順列の積とすると，集合 S_n は **n 次対称群**と呼ばれる群になる[6]．つまり，積の演算がつぎの条件を満たしている．

(i) $(\sigma\cdot\sigma')\cdot\sigma'' = \sigma\cdot(\sigma'\cdot\sigma'')$.

(ii) 任意の σ に対して，$\sigma\cdot\mathrm{id} = \mathrm{id}\cdot\sigma = \sigma$.

(iii) 任意の σ に対して，$\sigma\cdot\sigma' = \sigma'\cdot\sigma = \mathrm{id}$ を満たす σ' が存在する．

ただし，

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

を恒等置換という．明らかに，

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

は恒等置換である．また，(iii) の σ' を σ^{-1} で表す．

問題 16　3つの置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して，結合法則 $(\sigma\cdot\sigma')\cdot\sigma'' = \sigma\cdot(\sigma'\cdot\sigma'')$ を示せ．

いま，列 $(1,2,\ldots,n)$ の中の2つの元の入れ替えを何回か行い，新たな列

[6] 集合 G に積 $(t,s)\in G\times G \mapsto ts \in G$ が与えられ，任意の $t,s,r\in G$ に対して，$(ts)r = t(sr)$ を満たし，任意の $t\in G$ に対して $te = t = et$ を満たす元 $e\in G$ が存在し，各 $t\in G$ に対して，$ts = st = e$ を満たす $s\in G$ が存在するとき，G を群という．

$(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ が得られたとき，置換 σ の符号を，その入れ替えの回数の偶奇性により

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\text{入れ替えの回数が偶数}) \\ -1 & (\text{入れ替えの回数が奇数}) \end{cases}$$

と定義する．この定義が意味をもつためには，このような 2 つの元の入れ替えの手順にはいろいろな選択があるが，その選択にはよらないことを示さなければならない．その説明は 2.3.1 項で行う．上の並べ替えを表す写像 σ に対して，逆の $(i_1, \ldots, i_n)$ から $(1, 2, \ldots, n)$ へ戻す写像は σ の逆写像として σ^{-1} で表される．このときの入れ替えの回数は σ でも σ^{-1} でも変わらないので，これら 2 つは同じ符号をもつ．また，2 つの置換を続けて行った $\sigma \cdot \sigma'$ の符号は σ' に関する 2 つの元の入れ替えをしてから，σ に関する 2 つの元の入れ替えをすればよいから，σ' の符号と σ の符号の積になる．つまり

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}), \quad \mathrm{sgn}(\sigma \cdot \sigma') = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma')$$

などが成り立つ．これらの証明は 2.3.1 項の問題 48 に与えてある．

$n = 2$ の場合には，2 次対称群 S_2 の元は

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

の 2 つであるから，2 次の正方行列 $A = (a_{i,j})$ の行列式は，定義 1.3.1 から直ちに，

$$\det{}_2(A) = \sum_{\sigma \in S_2} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2}$$

と表せる．3 次の正方行列 $A = (a_{i,j})$ の行列式も，3 次対称群 S_3 を用いて，

$$\det{}_3(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3}$$

と表せる．したがって，3×3 行列の行列式を計算するときには，対角成分の積 $a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$ とそれを，34 頁の図 1.3 のように，左に平行にずらした成分の積 $a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$ と，右に平行にずらした成分の積 $a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$ の計 3 つの積の和から，逆対角成分の積 $a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$ とそれを平行にずらして得られる

2つの積 $a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$，$a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$ の計3つの積の和を引いて得られることがわかる．

n 次正方行列の行列式の展開

上の説明を念頭に，通常の教科書でよく見られる行列式の，一般展開式を用いた定義式が，定義 1.3.1 から自然に定理 1.3.3 として，導かれることを示す．そのために，1 から n までの n 個の自然数からなる集合 I における対称群と，$n-1$ 個の元からなる集合 $I \setminus \{i\}$ における対称群との関係を記述する記号や用語の準備をしよう．

本書では，今後も，集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を I で表す．

n 個の元からなる集合においても並べ替えに関して，n 次対称群 S_n と同じような群を考えることができる．

定義 1.3.2　J を n 個の元からなる集合とする．このとき，I から J への全単射を π を 1 つ固定し，$j_i = \pi(i)$ とすれば，$J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ となるので，J の元をその添え字のと同一視することにより，J 上に対称群 S_n の構造が導かれる．そこで，それを $S(J)$ で表し，その元の符号も対応する対称群の元の符号と同一視する．

I の空でない部分集合 J の元の並べ替えのなす群 $S(J)$ は n 次対称群 S_n の部分群[7] $\{\sigma \in S_n \mid \forall\, i \in I \setminus J : \sigma(i) = i\}$ とも同一視することができる．上の定義 1.3.2 で与えた $S(J)$ の元 σ の符号は，大小関係を保存する全単射 $\pi : \{1, 2, \ldots, j\} \to J$ を用いると，置換 $\pi^{-1} \circ \sigma \circ \pi \in S_j$ の符号である．

いま，この J として $I \setminus \{i\}$ を選ぶ．このときの，大小関係を保存する全単射 $\{1, 2, \ldots, n-1\} \to I \setminus \{i\}$ を π_i とすれば，同型[8]な対応，

$$\sigma \in S(I \setminus \{i\}) \longmapsto \pi_i^{-1} \circ \sigma \circ \pi_i \in S_{n-1}$$

が得られ，σ の符号は $\mathrm{sgn}(\pi_i^{-1} \circ \sigma \circ \pi_i)$ である．

また，I の中で i だけを先頭にもってくる

---

[7] 群の部分集合が元の群の積に関して再び群になるとき，部分群という．

[8] 群 G から群 G' への全単射が群の積を保存するとき，これらの群は同型であるという．同型な 2 つの群は，群としては同じ構造をもち，同一視することができる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ i & 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

なる置換を $\sigma_i \in S_n$ とすれば,

$$\sigma_i(I \setminus \{1\}) = I \setminus \{i\}, \quad \mathrm{sgn}(\sigma_i) = (-1)^{i-1}$$

となる．いま，$S_{n,i} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = i\}$ とすれば,

$$S_n = \bigcup_{i=1}^{n} S_{n,i}, \quad S_{n,i} \cap S_{n,j} = \emptyset \ (i \neq j)$$

が成り立つので，$\sigma \in S_{n,i}$ は $S(I \setminus \{i\})$ の元 σ' を用いて，$\sigma = \sigma' \cdot \sigma_i$ と一意的に表せる．ただし，σ' は i を固定する $\{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$ の元と同一視している.

少し準備に手間取ったが，上に用意した写像 π_i や σ_i などを用いて，行列式の定義 1.3.1 から正方行列式の一般展開式を導くことにする.

定理 1.3.3 n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ の行列式の値は

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

となる.

証明 n に関する数学的帰納法で示す．$n = 1$ のときは，自明である.

$n-1$ のときに，定理の展開式が成り立つと仮定する．$n-1$ 次の正方行列 $A_{i,1}$ の行の添え字の集合は $I \setminus \{i\}$ であり，列の添え字の集合は $I \setminus \{1\}$ である．ここで，上で用意した大小関係を保存する全単射 $\pi_i : \{1, 2, \ldots, n-1\} \to I \setminus \{i\}$ を使うと，帰納法の仮定により,

$$\det{}_{n-1}(A_{i,1}) = \sum_{\sigma' \in S(I \setminus \{i\})} \mathrm{sgn}(\pi_i^{-1} \circ \sigma' \circ \pi_i) \prod_{\ell=1}^{n-1} a_{\sigma'(\pi_i(\ell)), \pi_1(\ell)}$$

となる．ここで，$\pi_1(j) = j + 1 \ (j = 1, \ldots, n-1)$ であることに注意して,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \pi_1(1) & \cdots & \pi_1(n-1) \\ i & \sigma'(\pi_i(1)) & \cdots & \sigma'(\pi_i(n-1)) \end{pmatrix}$$

とすれば，$\sigma \in S_{n,i}$．写像 π_1, π_i はともに大小関係を保存していたから，σ は

$$\begin{pmatrix} i & \pi_i(1) & \cdots & \pi_i(n-1) \\ i & \sigma'(\pi_i(1)) & \cdots & \sigma'(\pi_i(n-1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i & \pi_i(1) & \cdots & \pi_i(n-1) \end{pmatrix}$$

と表せ，最初は i を固定する写像 $\sigma'' \in S_n$ であり，2 番目は i を先頭にもってくる写像 $\sigma_i \in S_n$ である．したがって，σ はこれらの積として，$\sigma = \sigma'' \cdot \sigma_i$ と表せる．ゆえに，$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma'')\mathrm{sgn}(\sigma_i) = \mathrm{sgn}(\sigma'')(-1)^{i-1}$．よって，$\sigma''$ を $S(I \setminus \{i\})$ の元 σ' と同一視すると，帰納法の仮定により，

$$\begin{aligned}
&\det{}_n(A) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i,1} \det{}_{n-1}(A_{i,1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i,1} \sum_{\sigma' \in S(I \setminus \{i\})} \mathrm{sgn}(\pi_i^{-1} \circ \sigma' \circ \pi_i) \prod_{\ell=1}^{n-1} a_{\sigma'(\pi_i(\ell)),\pi_1(\ell)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n,i}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}.
\end{aligned}$$

以上で，n の場合にも定理の展開式が成り立つことがわかった．ゆえに，数学的帰納法により，任意の n に対して定理 1.3.3 が成り立つ．■

n 次行列式の幾何学的意味

2 次元実ベクトル空間における向きの概念を，高次元実ベクトル空間に拡張して考える．

定義 1.3.4　n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において，ベクトル列 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ から導かれる n 次正方行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ が正則で，その行列式の値が正または負のとき，そのベクトル列の向きはそれぞれ正または負であるという．$n = 3$ の場合には，それぞれ右手系または左手系ともいう．

n 次の正方行列 A が対角行列 $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ の場合には

$$A\boldsymbol{e}_1 = d_1\boldsymbol{e}_1, \quad A\boldsymbol{e}_2 = d_2\boldsymbol{e}_2, \quad \ldots, \quad A\boldsymbol{e}_n = d_n\boldsymbol{e}_n$$

となる．このとき，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は，行列 A によりそれぞれベクトル $d_1\boldsymbol{e}_1, \ldots, d_n\boldsymbol{e}_n$ に移されるので，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を辺にもつ n 次元の単位立方体（平行多面体）

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{e}_i \,\middle|\, (c_i) \in [0,1]^n \right\}$$

は，$\boldsymbol{e}_1$ 方向には d_1 倍，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n$ 方向には d_n 倍した n 次元の直方体に移される．行列式の値が負になるのは，$\prod_{i=1}^{n} d_i$ の値が負の場合であるが，そのときには，最初の n 次元立方体の向きと対角行列 A により移された n 次元直方体の向きが違っていることになる．

n 次の正方行列 A が $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の場合には

$$A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_2, \quad \ldots, \quad A\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{a}_n$$

となっているから，行列 A は n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を辺にもつ n 次元単位立方体を，n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を辺にもつ n 次元平行多面体

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{a}_i \,\middle|\, (c_i) \in [0,1]^n \right\}$$

へ変換している．このとき，A の行列式の値の絶対値は，後の第 3 章の (3.11) 式と系 3.1.12 により，この n 次元平行多面体の体積となることがわかる．行列式の値の符号はこの高次元平行多面体の向きを与えている．

1.3.3 正方行列式の基本性質と特徴付け

ここでは，前項で定義した行列式の性質のうち最も基本的なものを説明し，行列式はその基本性質により特徴付けられることを示す．

基本性質

n 次正方行列式の行列式は線形性，交代性，規格化の 3 つの基本的性質をもつことと，行列式の計算はすべてこれらの性質から導かれることを示す．

定理 1.3.5（線形性）

(i) 第 j 列が2つのベクトル $\boldsymbol{a}_j$ と $\boldsymbol{b}_j$ の和になっている行列式の値は，その列を各々のベクトルで置き換えて得られる行列式の和になる．つまり，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| =& |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\ &+ |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n|.\end{aligned}$$

(ii) 第 j 列がベクトル $\boldsymbol{a}_j$ の c 倍になっている行列式の値は，もとの行列式の c 倍になる．つまり，

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = c|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n|.$$

証明　(i) $\boldsymbol{a}_j = {}^t(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ かつ $\boldsymbol{b}_j = {}^t(b_{1,j}, \ldots, b_{n,j})$ とすると，

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots (a_{\sigma(j),j} + b_{\sigma(j),j}) \cdots a_{\sigma(n),n} \\ =& \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &+ \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n}.\end{aligned}$$

(ii) $\boldsymbol{a}_j = {}^t(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ とすると，

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots (c a_{\sigma(j),j}) \cdots a_{\sigma(n),n} \\ =& c \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n}.\end{aligned}$$

■

これで行列式の各列ベクトルに関する線形性がわかる．

定理 1.3.6（交代性）　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の第 i 列と第 j 列 $(i < j)$ を入れ替えた行列の行列式の値は，もとの行列の行列式の値の -1 倍である．

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = -|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n|.$$

証明　$\sigma \in S_n$ の $\sigma(i)$ と $\sigma(j)$ を入れ替えた順列を $\sigma' \in S_n$，

$$\begin{aligned}&(\sigma'(1), \ldots, \sigma'(i), \ldots, \sigma'(j), \ldots, \sigma'(n)) \\ =& (\sigma(1), \ldots, \sigma(j), \ldots, \sigma(i), \ldots, \sigma(n))\end{aligned}$$

とすると，$\mathrm{sgn}(\sigma') = -\mathrm{sgn}(\sigma)$．よって，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i),j} \cdots a_{\sigma(j),i} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(j),i} \cdots a_{\sigma(i),j} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= -\sum_{\sigma' \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma')\, a_{\sigma'(1),1} \cdots a_{\sigma'(i),i} \cdots a_{\sigma'(j),j} \cdots a_{\sigma'(n),n} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

■

これで行列式は列ベクトルに関して交代性を満たすことがわかった．

行列式の値を求めるときに，そのまま直接定義に従って計算するよりも，行列を扱いやすい形に書き換えてから，求めるのが一般的である．そのときに使われる操作は，つぎの 3 つに要約される．

(i) 第 i 行を c 倍する（行列 $1 + (c-1)E_{i,i}$ を左から掛ける）．

(ii) 第 i 行を c 倍して第 j 行に加える（行列 $1_n + cE_{j,i}$ を左から掛ける）．

(iii) 第 i 行と第 j 行を入れ替える（行列 $1_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ を左から掛ける）．

そこで，これら 3 つの操作を**行に関する基本変形**という．転置行列を考えれば，列に関しても同じように

(i) 第 i 列を c 倍する（行列 $1 + (c-1)E_{i,i}$ を右から掛ける）．

(ii) 第 i 列を c 倍して第 j 列に加える（行列 $1_n + cE_{i,j}$ を右から掛ける）．

(iii) 第 i 列と第 j 列を入れ替える（行列 $1_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ を右から掛ける）．

が考えられ，**列に関する基本変形**という．

このとき，

$$\det{}_n(1_n + cE_{i,j}) = 1, \quad \det{}_n(1_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}) = -1$$

が成り立ち，しかも後の系 1.3.13 において，行列式は行列の積に関して乗法的 ($\det{}_n(AB) = \det{}_n(A)\det{}_n(B)$) なことが示されるので，上の 2 つの定理 1.3.5 と定理 1.3.6 の結果として，列に関する基本変形 (ii)（第 j 列を c 倍

して別の第 i 列に加える）を行っても，行列式の値は変わらないことと，上の定理 1.3.6 により，列に関する基本変形 (iii)（2 つの列を入れ替える）を行うと，行列式の符号が変わることがわかる．

定理 1.3.7（規格化） 単位行列の行列式の値は 1 である．

$$|\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n| = 1.$$

証明 $\boldsymbol{e}_j = {}^t(\delta_{1,j}, \ldots, \delta_{n,j})$ と表せるから，行列式の展開式

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \delta_{\sigma(1),1}\delta_{\sigma(2),2} \cdots \delta_{\sigma(n),n}$$

に現れる項の中で 0 でないのは σ が恒等写像のときに限られる．よって，その値は 1 である． ■

これで，行列式は，単位行列の行列式の値は 1 であるという，規格化条件を満たしていることがわかる．さらに，転置行列の行列式の値はもとの行列の行列式の値と同じであることもわかる．

定理 1.3.8 n 次正方行列 A に対して，

$$\det{}_n({}^tA) = \det{}_n(A).$$

証明 $A = (a_{i,j})$ とする．${}^tA = (b_{i,j})$ とすれば，$b_{i,j} = a_{j,i}$ である．また，定理 1.3.3 の展開式において，積 $a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ の順番を入れ替えると $a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$ と表されることと，$\{\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\} = S_n$ となることを用いると，

$$\begin{aligned}
\det{}_n(A) &= \sum_{\sigma \in S_n}^{n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n}^{n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n}^{n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})\, b_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n} = \det{}_n({}^tA).
\end{aligned}$$ ■

この定理により，行に関する基本変形 (ii)（第 i 行を定数倍して別の第 j 行に加える）を行っても，行列式の値は変わらないことと，行に関する基本変形 (iii)（2 つの行を入れ替える）を行うと，行列式の符号が変わることがわかる．また，これまで列ベクトルを中心に論じてきた行列式の内容を，行ベクトルを使った内容に書き換えることが可能である．このことは，第 2 章でも改めて述べるが，一般の矩形行列の行列式に対しては成り立たず，正方行列に固有の性質になっている．

正方行列の行列式がこれまで広く活用されてきた理由の 1 つは，列ベクトルを用いた記述が，行ベクトルを用いた記述に書き換えられ，あるいはその逆もいえるという事実に負っていることが多い．

問題 17　正方行列の行列式に対して，つぎのことを示せ．
(i) 行列式の値は各行ごとに，行ベクトルに関して線形である．
(ii) 行列式の値は 2 つの行ベクトルを入れ替えると符号が変わる．

行列式の特徴付け

行列式に親しんでくると，つぎにこれから述べるような特徴付けが可能なことがわかる．そこで，これを行列式の定義に使うことが考えられる．次節において，矩形行列の行列式の定義をするが，第 2 章の 2.3.2 項に行ってから，矩形行列の行列式を定義し直す際には，この行列式の特徴付けを使うことにする．

定理 1.3.9　n 個の n 次列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を変数[9]とする，n 変数の実数値関数 D がつぎの 2 つの条件

(i) D は各変数ごとに線形である
(ii) D の任意の 2 つの変数を入れ替えると，D の値の符号が変わる

を満たすときには，

$$D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det{}_n(A)\, D(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

と表せる．ただし，A は n 次正方行列 $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ である．

[9] 変数といっても，数ではなくてベクトルである．

証明に先立ち，上の条件について補足しておこう．条件 (i) で「各変数ごとに線形である」とは $D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ において，j 番目の変数 $\boldsymbol{a}_j$ が $\sum_{\ell=1}^{k} c_\ell \boldsymbol{b}_\ell$ と表されているときには，

$$\begin{aligned} &D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \textstyle\sum_{\ell=1}^{k} c_\ell \boldsymbol{b}_\ell, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k} c_\ell D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}_\ell, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \end{aligned}$$

となることで，このようなことが各変数ごとにいえるということである．条件 (ii) は，i 番目の変数と i と異なる j 番目の変数を入れ替えると

$$D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -D(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

となることである．したがって，i と j が違う場合に，$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ となれば，上の関数 D の値は 0 になることがわかる．さらに，$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が 1 次従属のときにも，関数 D の値は 0 になることがわかる．

証明　n 次正方行列 $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を $(a_{i,j})$ とすれば，$\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \boldsymbol{e}_i$ と表せる．したがって，条件 (i) を使うと，D の値は

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) &= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} D(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2} D(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &\;\;\vdots \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} D(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) \end{aligned}$$

と表せる．また，D の条件 (ii) により，右辺の添え字 $i_1, \ldots, i_n$ に同じものが現れると，$D(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = 0$ となるので，$(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ は $(1, 2, \ldots, n)$ の置換になっているものだけを考えればよい．したがって，$\sigma(k) = i_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ を満たす写像 $\sigma \in S_n$ を用いると，

$$D(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = \mathrm{sgn}(\sigma) D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

と表せる．行列 A は $A=(a_{i,j})$ と表せるので，定理 1.3.3 により，

$$D(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}D(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$$
$$=\det{}_n(A)\,D(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$$

となる． ■

つぎの系により，行列式は上の定理 1.3.9 の 2 条件とつぎの系の条件からなる 3 つの条件により特徴付けられることがわかる．

系 1.3.10 n 次正方行列 $A=(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ に対して，定理 1.3.9 の関数 D がさらに 3 番目の条件

(iii) 自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ に対して，$D(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)=1$

を満たせば，$D(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=\det{}_n(A)$ となる．

つぎに，行列式の第 j 列に関する展開を示す．第 1 列に関する展開は行列式の定義 1.3.1 そのものである．

系 1.3.11 n 次正方行列 $A=(a_{i,j})$ から第 i 行と第 j 列を除いて得られる $n-1$ 次正方行列を $A_{i,j}$ とする．このとき，

(i) つぎの第 j 列に関する展開ができる．

$$\det{}_n(A)=(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{i,j}\det{}_{n-1}(A_{i,j}).$$

(ii) (i,j) 成分の値が $(-1)^{i+j}\det{}_{n-1}(A_{j,i})$ により与えられる n 次正方行列を B とすれば，$BA=AB=\det{}_n(A)1_n$ となる．

証明 (i) $A=(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ とする．行列式の定義により，

$$|\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{a}_1,\ldots,\widehat{\boldsymbol{a}_j},\ldots,\boldsymbol{a}_n|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{i,j}\det{}_{n-1}(A_{i,j}). \tag{1.2}$$

ただし，$\widehat{\boldsymbol{a}_j}$ は，$\boldsymbol{a}_j$ を取り除くことを意味する．すなわち，左辺は

$$|\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{j-1},\boldsymbol{a}_{j+1},\ldots,\boldsymbol{a}_n|$$

のことである．定理 1.3.6 で示した，行列式の交代性により，

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = (-1)^{j-1}|\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \widehat{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$$

であるから，主張 (i) がわかる．

(ii) $b_{i,j} = (-1)^{i+j} \det_{n-1}(A_{j,i})$ とし，$B = (b_{i,j})$ とすれば，B は n 次正方行列である．行列 BA の (j,k) 成分は

$$\sum_{i=1}^{n} b_{j,i}a_{i,k} = (-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{i,k}\det_{n-1}(A_{i,j})$$

で与えられる．$j = k$ の場合，右辺は，条件 (i) により，$\det_n(A)$ となるので，BA の対角成分の値はどれも $\det_n(A)$ である．$j \neq k$ の場合には，(1.2) 式において，$\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{e}_i$ の場合を考えれば，$(-1)^{i-1}\det_{n-1}(A_{i,j}) = |\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \widehat{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$ となるので，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} b_{j,i}a_{i,k} &= (-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}|\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \widehat{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\ &= (-1)^{j-1}|\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \widehat{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\ &= |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n|.\end{aligned}$$

右辺の第 j 列と第 k 列が同一のベクトルになるから，行列式の値は 0 になる．よって，BA の非対角成分はすべて 0 となり，$BA = \det_n(A)1_n$ が得られる．

最後に，$AB = \det_n(A)1_n$ を示す．A の転置行列から第 i 行と第 j 列を除いて得られる $n-1$ 次正方行列 $({}^tA)_{i,j}$ は $A_{j,i}$ の転置行列であるから，AB の (i,j) 成分は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} &= (-1)^{j-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_{i,k}\det_{n-1}(A_{j,k}) \\ &= (-1)^{j-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_{i,k}\det_{n-1}(({}^tA)_{k,j}).\end{aligned}$$

ここで，${}^tA = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ とすれば，$\boldsymbol{b}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\boldsymbol{e}_k$ となるので，(1.2) 式により，

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_{i,k}\det_{n-1}(({}^tA)_{k,j}) = |\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \widehat{\boldsymbol{b}}_j, \ldots, \boldsymbol{b}_n|$$

$$= (-1)^{j-1}\delta_{i,j}\det{}_n({}^tA).$$

したがって，定理 1.3.8 により，$AB = \det_n(A)1_n$. ■

$(-1)^{i+j}\det{}_{n-1}(A_{i,j})$ を $a_{i,j}$ の**余因子**といい，これを (j,i) 成分にもつ n 次正方行列を，行列 A の**余因子行列**という．

この余因子行列の考え方は後にラプラス展開の考え方へと発展していく．

問題 18 ファンデルモンドの行列式 (1771) に関するつぎの公式を示せ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(a_j - a_i).$$

1.3.4 正方行列式の性質

ここでは正方行列の行列式を計算するときに，最も基本的であると考えられる性質を説明する．

乗法性

まず，行列式は，行列の積の演算を保存することを示そう．これを行列式の**乗法性**という．

定理 1.3.12 (コーシー (1812)) 2 つの n 次正方行列 A, B に対して

$$\det{}_n(AB) = \det{}_n(A)\det{}_n(B).$$

証明 $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ に対して，$AB = A(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = (A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$ であるから，$\det{}_n(AB) = |A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n|$. いま，$n$ 変数の関数 D を

$$D(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = |A\boldsymbol{x}_1, \ldots, A\boldsymbol{x}_n|$$

とすれば，関数 D は定理 1.3.9 の条件 (i) と (ii) を満たしているので，同じ定理により，$D(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = c\det{}_n((\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n))$ を満たす定数 c が存在する．したがって，$(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = 1_n$ とすれば，

$$|A\boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_n| = D(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = c \det{}_n(1_n) = c.$$

したがって，$\det{}_n(A) = \det{}_n(A1_n) = |A\boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_n| = c$ となる．ゆえに，

$$\det{}_n(AB) = D(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = c \det{}_n(B) = \det{}_n(A) \det{}_n(B). \qquad \blacksquare$$

系 1.3.13（ケイリー (1853)）

(i) n 次正方行列 A が正則であるための必要十分条件は $\det{}_n(A) \neq 0$ である．

(ii) n 次正則行列 A の逆行列の (i,j) 成分は，A の余因子行列の (i,j) 成分を $\det{}_n(A)$ で割った値

$$\frac{(-1)^{i+j} \det{}_{n-1}(A_{j,i})}{\det{}_n(A)}$$

により与えられる．

(iii) n 次正方行列 A, B が $AB = 1_n$ または $BA = 1_n$ を満たせば，A は正則で，B はその逆行列である．

証明　(i) 必要性から示す．行列 A が正則ならば，$AB = 1_n$ を満たす行列 B が存在する．したがって，コーシーの定理 1.3.12 により，

$$\det{}_n(A) \det{}_n(B) = \det{}_n(AB) = \det{}_n(1_n) = 1.$$

ゆえに，$\det{}_n(A) \neq 0$.

逆に，系 1.3.11 により，$BA = AB = \det{}_n(A)1_n$ を満たす n 次正方行列 B が存在する．したがって，A の行列式の値が 0 でなければ，A は正則である．

(ii) (i) と系 1.3.11 による．

(iii) $AB = 1_n$ または $BA = 1_n$ ならば，定理 1.3.12 により，$\det{}_n(A) \neq 0$ となるので，(i) により，A は正則である． $\blacksquare$

ラプラス展開と Cullis 符号の定義

経験的にわかることであるが，行列式の計算の手数は次数の増加とともに指数関数的に増えてきて，次数が 3 を越えると大変になってくる．そのよう

なとき役に立つのが，これから定理 1.3.15 において与えるラプラス展開である．もちろん，行列式の一般論においても，最も基本的な展開である．

つぎの定義において導入される数は，従来からの線形代数の教科書では馴染みのものであるが，矩形行列の行列式の議論に入ってから，最も基本的な数になるので，この時点で，これに名前を付けておく．

定義 1.3.14 $1 \leq k \leq n$ とし，$I = \{1, 2, \ldots, n\}$ の k 個の元からなる部分集合全体のなす集合族を $\mathscr{C}_k^I$ で表すことにする．各 $c \in \mathscr{C}_k^I$ に対して定まる値

$$(-1)^{(\sum_{i \in c} i) - (k(k+1)/2)}$$

を c の **Cullis 符号**といい，$\mathrm{sgn}_I(c)$ で表す．

この c の符号を定義している式の指数は，$c = \{i_1, \ldots, i_k\}$ の場合には，$\sum_{\ell=1}^{k}(i_\ell - \ell)$ と書くこともできる．これが何を意味しているかについては，第 2 章の命題 2.3.8 の主張が一番わかりやすいのではないかと思われる．

さて，X を $n \times k$ 行列とする．任意の $c \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，その元を小さい順に並べた列 $i_1, \ldots, i_k$ を用いて，$n \times k$ 行列を

$$E_c = (\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k})$$

とおく．この行列は，行列 $X = (x_{i,j})$ から行の添え字が c に属するものだけ取り出して得られる部分行列

$$\begin{pmatrix} x_{i_1,1} & x_{i_1,2} & \cdots & x_{i_1,k} \\ x_{i_2,1} & x_{i_2,2} & \cdots & x_{i_2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i_k,1} & x_{i_k,2} & \cdots & x_{i_k,k} \end{pmatrix}$$

を表すときに使われる．実際，この行列は ${}^tE_cX$ と表せる．同様に，$n \times \ell$ 行列 Y において，$k < \ell \leq n$ の場合に，列の添え字が $\{1, 2, \ldots, \ell\}$ に属するものだけ取り出して得られる $n \times k$ 矩形行列は $c \in \mathscr{C}_k^{\{1,\ldots,\ell\}}$ を用いて YE_c と表せる．

問題 19 4×2 行列 $A = (a_{i,j})$ と $c = \{1, 4\}$ に対して，2 次正方行列 ${}^tE_cA$ を求めよ．

まず，正方行列の行列式の計算を，次数の低い行列の行列式の計算に帰着させる方法として，ラプラス展開が知られている．その展開式の中で，Cullis 符号が使われていることに留意しておいて欲しい．つぎの定理の 2 つの展開式はともにラプラス展開といわれているが，それらを区別するときには，最初の展開式を行に関するラプラス展開，後の展開式を列に関するラプラス展開ということにする．

定理 1.3.15（ラプラス展開 (1772)）　$1 \leq k < n$ とし，$K = \{1, 2, \ldots, k\}$ とおく．n 次正方行列 A に対して，

$$A_1 = AE_K, \quad A_2 = AE_{I \setminus K}, \quad B_1 = {}^tE_K A, \quad B_2 = {}^tE_{I \setminus K} A$$

とすれば，$A = (A_1, A_2)$ かつ ${}^tA = ({}^tB_1, {}^tB_2)$ となり

$$\begin{aligned} \det{}_n(A) &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \operatorname{sgn}_I(c) \det{}_k({}^tE_c A_1) \det{}_{n-k}({}^tE_{I \setminus c} A_2) \\ &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \operatorname{sgn}_I(c) \det{}_k(B_1 E_c) \det{}_{n-k}(B_2 E_{I \setminus c}). \end{aligned}$$

証明　列に関するラプラス展開の証明から始める．$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (a_{i,j})$ とすれば，$\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \boldsymbol{e}_i$ と表せる．したがって，行列式の列ベクトルに関する線形性により，

$$\begin{aligned} \det{}_n(A) &= |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\ &= \left| \sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^n a_{i_k,k} \boldsymbol{e}_{i_k}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n \right| \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n a_{i_1,1} \cdots a_{i_k,k} |\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n|. \end{aligned}$$

つぎに，行列式の列ベクトルに関する交代性により，添え字 $\{i_1, \ldots, i_k\}$ の中に同じものが現れると，その項の値は 0 になるので，すべて違っている場合だけを考えればよい．したがって，$\{i_1, \ldots, i_k\}$ は $\mathscr{C}_k^I$ の元である場合だけを計算すればよい．ゆえに，上の式の右辺は，まず $\{i_1, \ldots, i_k\} = c$ を満たす $\{i_1, \ldots, i_k\}$ の並べ替えについて和をとり，つぎに $c \in \mathscr{C}_k^I$ について和をと

ればよい．

そこで，c の元を小さい順に並べたものを $j_1, \dots, j_k$ とし，c の k 個からなる元 $\{j_1, \dots, j_k\}$ の並べ替え全体のなす対称群を $S(c)$ とする．この対称群の符号は定義 1.3.2 で説明したものを使う．ここで，

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \in S(c)$$

とすると，$|\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_k}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n| = \mathrm{sgn}(\sigma) \det{}_n((E_c, A_2))$ となるので，

$$\begin{aligned} &\sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \sum_{\sigma \in S(c)} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(j_1),1} \cdots a_{\sigma(j_k),k} \det{}_n((E_c, A_2)) \\ &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det{}_k({}^tE_c A_1) \det{}_n((E_c, A_2)) \end{aligned}$$

と表せる．つぎに，右辺の行列式 $\det{}_n((E_c, A_2))$ を，定義 1.3.1 に従って計算すると，

$$\begin{aligned} \det{}_n((E_c, A_2)) &= (-1)^{j_1 - 1} \det{}_{n-1}({}^tE_{I \setminus \{j_1\}}(E_{\{j_2, \dots, j_k\}}, A_2)) \\ &= (-1)^{j_1 - 1}(-1)^{j_2 - 2} \det{}_{n-2}({}^tE_{I \setminus \{j_1, j_2\}}(E_{\{j_3, \dots, j_k\}}, A_2)) \\ &\ \ \vdots \\ &= (-1)^{\sum_{\ell=1}^k (j_\ell - \ell)} \det{}_{n-k}({}^tE_{I \setminus \{j_1, \dots, j_k\}} A_2) \\ &= \mathrm{sgn}_I(c) \det{}_{n-k}({}^tE_{I \setminus c} A_2) \end{aligned}$$

となる．これで列に関するラプラス展開が得られる．

行列 A の転置は ${}^tA = ({}^tB_1, {}^tB_2)$ となるので，定理 1.3.8 を使うと，列に関するラプラス展開により，

$$\begin{aligned} \det{}_n(A) = \det{}_n({}^tA) &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \mathrm{sgn}_I(c) \det{}_k({}^tE_c {}^tB_1) \det{}_{n-k}({}^tE_{I \setminus c} {}^tB_2) \\ &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \mathrm{sgn}_I(c) \det{}_k(B_1 E_c) \det{}_{n-k}(B_2 E_{I \setminus c}). \end{aligned}$$ ■

例 1.3.16 4 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & \ell \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

の値は，行に関するラプラス展開を使うと

$$\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}\begin{vmatrix} k & \ell \\ o & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ i & j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g & h \\ o & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g & h \\ k & \ell \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & d \\ o & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e & f \\ m & n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & d \\ k & \ell \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j \\ m & n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix}$$

のように，2次の行列式の計算に帰着される．

系 1.3.17　$0 < k < n$ とする．k 次正方行列 A と $n-k$ 次正方行列 C に対して，

$$\det{}_n\left(\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\right) = \det{}_k(A)\det{}_{n-k}(C).$$

この系は，ラプラス展開において，$c = \{1, \ldots, k\}$ とすればすぐにわかる．

問題 20　この系をラプラス展開を使わずに，直接証明せよ．

問題 21　(i) 奇数次交代行列の行列式の値は 0 になることを示せ．
(ii) n 次正方行列 A, B に対して，つぎの式を示せ．

$$\det{}_{2n}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\right) = \det{}_n(A+B)\det{}_n(A-B).$$

1.4　矩形行列の行列式

いよいよ，本書の主題である，Cullis により導入された，列数 k が行数 n より少ない縦長の矩形行列 $X = (x_{i,j})$ の行列式を定義し，それがもつ基本性質をいくつか述べる．ここでの定義は初等的であるから，簡単な具体例の計算などには適しているが，一般的な議論をする際には，使い勝手が悪い．そこで，第2章において，一般論が議論しやすいように，新たに定義をし直すことに

する．その際，矩形行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = (x_{i,j})$ の行列式を $\det_{n,k}(X)$, $\det_{n,k}((\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k))$ または

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,k} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,k} \end{vmatrix}$$

で表す．とくに，$n = k$ のときには，X は正方行列となり，この場合の定義は前節の正方行列に対する行列式の定義と一致している．

1.4.1 矩形行列の行列式の定義

ここでは，つぎの定義において，矩形行列（断らない限り，すべて列数 k が行数 n 以下と仮定する）の行列式を，列数に関して，帰納的に定義し，これを **Cullis** 行列式と呼ぶことにするが，単に行列式と呼ぶことも多い．

定義 1.4.1 (i) $n \times 1$ 行列 $X = (x_i)$ の行列式の値を

$$\det_{n,1}(X) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i$$

で定義する．

(ii) $n \geq k \geq 2$ とする．$n \times k$ 行列 $X = (x_{i,j})$ の行列式をの値を，k に関して帰納的に，

$$\det_{n,k}(X) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{i,1} \det_{n-1,k-1}(X_{i,1})$$

で定義する．ただし，$X_{i,1}$ は X から第 i 行と第 1 列と取り除いて得られる $(n-1) \times (k-1)$ 行列である．

まず，矩形行列で一番簡単なのは，2 次の正方行列であるが，この行列式は 1.3 節で詳しく説明したので，ここでは，3×2 行列の行列式の計算から始める．

例 1.4.2　3×2 行列 $X = (x_{i,j})$ の行列式の値は，定義 1.4.1 により，

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \end{vmatrix} = x_{1,1} \begin{vmatrix} x_{2,2} \\ x_{3,2} \end{vmatrix} - x_{2,1} \begin{vmatrix} x_{1,2} \\ x_{3,2} \end{vmatrix} + x_{3,1} \begin{vmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$= x_{1,1}(x_{2,2} - x_{3,2}) - x_{2,1}(x_{1,2} - x_{3,2}) + x_{3,1}(x_{1,2} - x_{2,2}).$$

この例からもからわかるように，$n \times 2$ 行列の行列式の値を定義 1.4.1 に基づいて，直接計算してもそれほど大変ではない．しかし，つぎの定理 1.4.3 のように 2 次の正方行列の行列式の計算に帰着させることもできる（図 1.4 参照[10]）．このような性質は，少し後の定理 1.4.9 でわかるように，一般の $n \times k$ 行列に対しても同じように成り立つ．

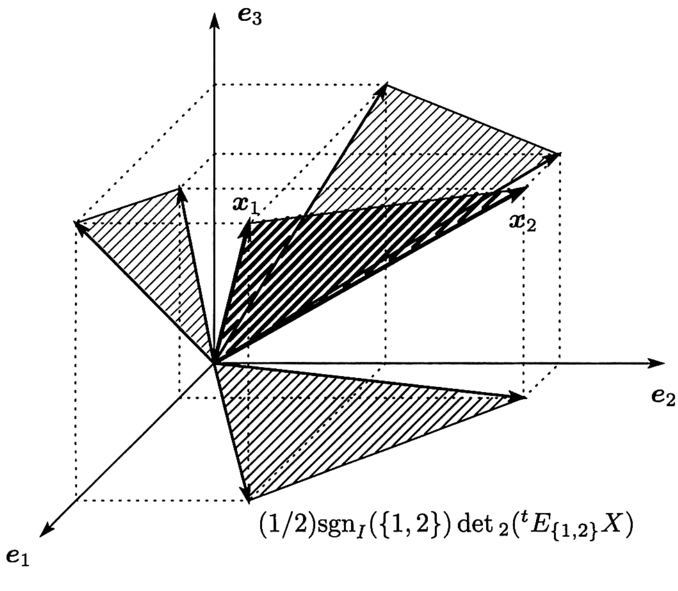


図 1.4　3×2 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ の行列式の展開図．

[10] この図では，列ベクトルの張る平行四辺形を使いたかったが，図が描きにくかったのと，図が大きくなりすぎるので，その半分の三角形を使っている．

定理 1.4.3 $n \geq 2$ とする．$n \times 2$ 行列 $X = (x_{i,j})$ に対して，

$$\det{}_{n,2}(X) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} \begin{vmatrix} x_{i,1} & x_{i,2} \\ x_{j,1} & x_{j,2} \end{vmatrix}.$$

証明 行列式の定義を書き直すことにする．

$$\begin{aligned}
\det{}_{n,2}(X) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{i,1} \det{}_{n-1,1}(X_{i,1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{i,1} \Big(\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j-1} x_{j,2} + \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{j} x_{j,2} \Big) \\
&= \sum_{i>j} (-1)^{i+j} x_{i,1} x_{j,2} + \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} x_{i,1} x_{j,2} \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} (x_{i,1} x_{j,2} - x_{j,1} x_{i,2}) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j-1} \begin{vmatrix} x_{i,1} & x_{i,2} \\ x_{j,1} & x_{j,2} \end{vmatrix}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

この定理の結果と，3 次正方行列の第 3 列に関する展開を考えれば，つぎの系が得られる．この結果は，系 1.4.12 や命題 2.4.15 で示されるように，一般の $n \times (n-1)$ 行列に対しても成り立つ．

系 1.4.4 つぎの式が成り立つ．

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

このとき，この値の絶対値は 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ の 3 点 (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ を頂点とする三角形の面積の 2 倍である．

証明 定理 1.4.3 により，左辺は

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

となるから，系 1.3.11 の (i) により，この値は，求める等式の右辺の値と一致する．

つぎに，行 (a_i, b_i) を表すベクトルを $\boldsymbol{a}^i$ とする．2つのベクトル $\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^3$ と $\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a}^3$ の張る（つまり，原点と $\boldsymbol{a}^1 - \boldsymbol{a}^3$ または $\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a}^3$ を直交座標にもつ点を結ぶ2つの線分を辺とする）平行四辺形の符号付きの面積は

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 - a_3 & b_1 - b_3 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 \end{vmatrix} &= (a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3) \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) - (a_1 b_3 - a_3 b_1) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\end{aligned}$$

となり，与えられた 3×2 行列の行列式の値と一致する．したがって，その絶対値は3点 $\boldsymbol{a}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ を頂点にもつ三角形の面積の2倍である．■

つぎの例の3次元版が例 1.4.8 において，高次元版が命題 2.4.17 において与えられている．

例 1.4.5　2次元平面 $\mathbb{R}^2$ において，相異なる2点 (a_1, b_1), (a_2, b_2) を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = x(b_1 - b_2) - a_1(y - b_2) + a_2(y - b_1) = 0$$

となる．(上の式の (x, y) に $(a_1.\ b_1)$ または $(a_2.\ b_2)$ を代入すると，系 1.4.4 により，式は0となる．）さらに，この式を整理すると，$a_1 \neq a_2$ のとき，

$$y = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} x - \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2 - a_1}$$

が導かれる．したがって，異なる3点 (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) が1直線上にあるとき，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つ．

問題 22 つぎの式を示せ.

$$\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & d+y \\ b+x & e+y \\ c+x & f+y \end{vmatrix}.$$

問題 23 つぎの行列式の値を計算せよ.

(i)

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \\ c & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ a+b & a+b \\ 2b & 2a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

問題 24 つぎの式を示せ.

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & d \\ 1 & e \\ 1 & f \end{vmatrix} = 0.$$

つぎに，矩形行列の右側，または左側から正方行列を掛けたときの行列式を計算してみる.

例 1.4.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 5 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

となる．このとき

$$\det{}_{3,2}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (1-3) - 2(2-3) + 3(2-1) = 3$$

である．他方

$$\det{}_{3,2}(AB) = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 5 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 4(5-12) - 5(7-12) + 9(7-5) = 15,$$

$$\det{}_2(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

かつ

$$\det{}_3(C) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1,$$

$$\det{}_{3,2}(CA) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4(5-8) - 4(5-8) + 7(5-5) = 0$$

であるから，$\det{}_{3,2}(AB) = \det{}_{3,2}(A)\det{}_2(B)$ は成り立つが，$\det{}_{3,2}(CA) = \det{}_3(C)\det{}_{3,2}(A)$ は成り立たない．

問題 25　3×2 行列 A と，2 次正方行列 B に対して，

$$\det{}_{3,2}(AB) = \det{}_{3,2}(A)\det{}_2(B)$$

となることを示せ．

系 2.6.2 において，$k \leq n$ の場合には，一般に，$n \times k$ 行列 X と k 次正方行列 Y に対して，$\det{}_{n,k}(XY) = \det{}_{n,k}(X)\det{}_k(Y)$ が成り立つことが示される．

つぎに，$k = 3$ の場合を考える．3 次正方行列の行列式は 1.2 節で詳しく説明したので，ここでは，4×3 行列の行列式の計算から始めよう．

例 1.4.7　4×3 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & f & p \\ b & g & q \\ c & h & r \\ d & i & s \end{pmatrix}$$

の行列式は定義に直接従えば,

$$\det{}_{4,3}(A) = a \begin{vmatrix} g & q \\ h & r \\ i & s \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} f & p \\ h & r \\ i & s \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} f & p \\ g & q \\ i & s \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} f & p \\ g & q \\ h & r \end{vmatrix}$$

となり, 3×2 行列の計算に帰着される.

問題 26　行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & b & a \\ b & b & b \end{vmatrix}$$

の値は $(a-b)^3$ となることを示せ.

例 1.4.8　3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の相異なる 3 点 (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) を通る平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

となる.

1.4.2　矩形行列式の正方行列式による展開

ここでは, $n \times 2$ 行列の行列式に関して成り立っていた正方行列式による展開定理 1.4.3 を, つぎの定理のように, 一般の $n \times k$ 行列の場合へ拡張することができる.

定理 1.4.9　$n \times k$ 行列 X に対して,

$$\det{}_{n,k}(X) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} (-1)^{\sum_{\ell=1}^{k}(i_\ell - \ell)} \begin{vmatrix} x_{i_1,1} & x_{i_1,2} & \cdots & x_{i_1,k} \\ x_{i_2,1} & x_{i_2,2} & \cdots & x_{i_2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i_k,1} & x_{i_k,2} & \cdots & x_{i_k,k} \end{vmatrix}.$$

この式の右辺に現れる係数 $(-1)^{\sum_{\ell=1}^{k}(i_\ell - \ell)}$ の値は, 定義 1.3.14 で述べた $c = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathscr{C}_k^I$ の Cullis 符号 $\mathrm{sgn}_I(c)$ の値でもある.

この定理の証明は, これまでの議論より少し長くなるので, 改めて 1.4.4 項において与えることにする. 第 2 章にも同内容の定理 2.4.4 があるが, その証明も, 予備知識を少し準備するが, ほぼ同じ方針で進められている.

例 1.4.10　例 1.4.7 の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & f & p \\ b & g & q \\ c & h & r \\ d & i & s \end{pmatrix}$$

の行列式を定理 1.4.9 を用いて求める. $(-1)^{\sum_{\ell=1}^{3}(i_\ell - \ell)} = (-1)^{\sum_{\ell=1}^{3} i_\ell}$ であるから,

$$\det{}_{4,3}(A) = \begin{vmatrix} a & f & p \\ b & g & q \\ c & h & r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & f & p \\ b & g & q \\ d & i & s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & f & p \\ c & h & r \\ d & i & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & g & q \\ c & h & r \\ d & i & s \end{vmatrix}$$

となり, 3 次正方行列の行列式の計算に帰着される.

註 1　少し後の系 1.4.12 により, $n \times (n-1)$ 行列 A の行ベクトルを上から, $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^n$ とする. このとき, $\boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{a}^j$ $(i \neq j)$ であれば, $\det{}_{n,n-1}(A) = 0$ となる. しかし, $\boldsymbol{a}^i = c\boldsymbol{a}^j$ $(i \neq j, c \neq 1)$ であっても, $\det{}_{n,n-1}(A) = 0$ とは限らない. 例えば,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

の場合には，$\det_{3,2}(B)=0$ であるが，$\det_{3,2}(C)=-4$ となる．

問題 27 つぎの行列

$$A=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\\0&-2\end{pmatrix},\quad B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

の行列式の値を求め，それぞれ $\operatorname{sgn}_I(c)\det_2({}^tE_cA)$ の値がすべての $c\in\mathscr{C}_2^I$ に対して，また $\operatorname{sgn}_I(d)\det_2({}^tE_dB)$ の値がすべての $d\in\mathscr{C}_2^I\setminus\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ に対して同一であることを示せ．

1.4.3 矩形行列式の基本性質

正方行列式に対して，1.3.3 項の定理 1.3.5 と定理 1.3.6 において示した線形性と交代性が，一般の矩形行列の行列式に対しても，同じように成り立つことを示そう．

定理 1.4.11 $n\times k$ 行列 $X=(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_k)$ に対して，

(i) （加法性）第 j 列のベクトルが $\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{a}_j+\boldsymbol{b}_j$ となっているときの行列式の値は，その列を各々のベクトルで置き換えて得られる行列式の和になる．つまり，

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{a}_j+\boldsymbol{b}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k|\\=&|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{a}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k|+|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{b}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k|.\end{aligned}$$

(ii) （斉次性）第 j 列のベクトル $\boldsymbol{x}_j$ を定数倍した行列式の値は，もとの行列式の定数倍になる．つまり，

$$|\boldsymbol{x}_1,\dots,c\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k|=c|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k|.$$

(iii) （交代性）第 i 列を他の第 j 列を入れ替えると符号が変わる．つまり，

$$|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_i,\dots,\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_k|=-|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_j,\dots,\boldsymbol{x}_i,\dots,\boldsymbol{x}_k|.$$

証明　定理 1.4.9 により，行列式 $\det_{n,k}(X)$ は k 次正方行列の和として表される．1.3.3 項の基本性質によれば，正方行列は，各列ベクトルに関して，線形性（加法性と斉次性）と交代性を満たすので，$\det_{n,k}(X)$ も同じ性質を満たしている．■

系 1.4.12　A が $n \times (n-1)$ 行列ならば，

$$\det_{n,n-1}(A) = \det_n((A, \widetilde{\mathbf{1}})).$$

ただし，$\widetilde{\mathbf{1}}$ はすべての成分が 1 の $n \times 1$ 行列である．

証明　n 次正方行列 $(A, \widetilde{\mathbf{1}}) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \widetilde{\mathbf{1}})$ の行列式の交代性により，

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \widetilde{\mathbf{1}}| = (-1)^{n-1} |\widetilde{\mathbf{1}}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}|$$

となる．行列式の定義により，

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \widetilde{\mathbf{1}}| = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \det_{n-1}({}^t E_{I \setminus \{i\}} A).$$

他方，$\mathrm{sgn}_I(I \setminus \{i\}) = (-1)^{n-i}$ であるから，定理 1.4.9 により，系の証明ができる．■

問題 28　$n \times (n-2)$ 行列 A に対して，$\det_{n,n-1}((A, \widetilde{\mathbf{1}})) = 0$ となることを示せ．

問題 29　例 1.4.7 の行列式 $\det_{4,3}(A)$ は，例 1.3.16 で与えた 4 次正方行列のラプラス展開と

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

を用いることにより，

$$\begin{vmatrix} a & f \\ b & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r \\ s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & f \\ c & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q \\ s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & f \\ d & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q \\ r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & g \\ c & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & g \\ d & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & h \\ d & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ q \end{vmatrix}$$

と展開されることを示せ．

定理 1.4.13（規格化）　任意の $c \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，

$$\det_{n,k}(E_c) = \mathrm{sgn}_I(c).$$

証明　$n \times k$ 行列 $E_c = (\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k})$ に対して，矩形行列の行列式の定義を繰り返し適用する．まず，E_c の第 1 列は i_1 番目の成分は 1，それ以外は 0 であるから，

$$\det{}_{n,k}(E_c) = (-1)^{i_1-1} \det{}_{n-1,k-1}({}^t E_{I\setminus\{i_1\}} E_{c\setminus\{i_1\}}).$$

つぎに，$i_1 < \cdots < i_k$ であるから，$(n-1) \times (k-1)$ 行列 ${}^t E_{I\setminus\{i_1\}} E_{c\setminus\{i_1\}}$ の第 1 列は $i_2 - 1$ 番目の成分は 1，それ以外は 0 であるから，

$$\begin{aligned}&\det{}_{n-1,k-1}({}^t E_{I\setminus\{i_1\}} E_{c\setminus\{i_1\}})\\ =&(-1)^{(i_2-1)-1} \det{}_{n-2,k-2}({}^t E_{I\setminus\{i_1,i_2\}} E_{c\setminus\{i_1,i_2\}}).\end{aligned}$$

以下，同様な議論を繰り返すと，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(E_c) &= (-1)^{\sum_{\ell=1}^{k-1}\{(i_\ell-(\ell-1))-1\}} \det{}_{n-(k-1),1}({}^t E_{I\setminus\{i_1,\ldots,i_{k-1}\}} E_{\{i_k\}})\\ &= (-1)^{\sum_{\ell=1}^{k-1}\{(i_\ell-(\ell-1))-1\}} (-1)^{\{i_k-(k-1)\}-1}\\ &= (-1)^{\sum_{\ell=1}^{k}\{(i_\ell-(\ell-1))-1\}} = \mathrm{sgn}_I(c).\end{aligned}$$

■

正方行列の行列式に対して，定理 1.3.3 で与えた一般展開式は，第 2 章の命題 2.3.7 において示すように，矩形行列の行列式の場合へも一般化することができるが，ここでは立ち入らないことにする．

1.4.4　1.4 節の補足

つぎの定理 1.4.9 の証明だけでなく，今後も使う用語の準備をする．自然数の対 k, n に対して $k \leq n$ の場合を考える．このとき，

$$I = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad K = \{1, 2, \ldots, k\}$$

とおく．対称群 S_n は I 上の置換のなす群であった．置換は I から I への単射とも見なせる．そこで，この対称群の概念を少し一般化しておく．

定義 1.4.14　(i) K から I への単射全体の集合を S_k^I で表す．

(ii) 写像 $\sigma \in S_k^I$ に対し，$\sigma(K)$ の元を小さい順に並べた $i_1, i_2, \ldots, i_k$ を用

いて，σ の符号をつぎのように定める．

$$\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma) = \mathrm{sgn}_I(\sigma(K))\ \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(k) \end{pmatrix}.$$

これを**単射** $\sigma \in S_k^I$ **の符号**という．

註 2　$n = k$ のときには，$\sigma \in S_k^I$ は I 上の置換になるので $S_k^I = S_n$ かつ $\mathrm{sgn}_I(I) = 1$ となる．したがって，単射 $\sigma \in S_k^I$ の符号 $\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)$ は，置換の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ と一致している．

定理 1.4.9 の証明

証明　$X = (x_{i,j})$ とすれば，定理 1.4.11 で示された，行列式の各列ベクトルに関する線形性により，

$$\det{}_{n,k}(X) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} x_{i_1,1}\cdots x_{i_k,k}\det{}_{n,k}((\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_k})).$$

また，行列式の列ベクトルに関する交代性により，右辺の添え字 $i_1,\ldots,i_k$ の中に同じものが現れるときの行列式の値は 0 になるので，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(X) &= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\ \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}=c} x_{i_1,1}\cdots x_{i_k,k}\det{}_{n,k}((\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_k})) \\ &= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\ \sum_{\substack{\sigma\in S_k^I \\ \sigma(K)=c}} x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(k),k}\det{}_{n,k}((\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma(k)})).\end{aligned}$$

ここで，c の元を小さい順に並べた $j_1,\ldots,j_k$ を使うと，$\sigma(K) = c$ を満たす $\sigma \in S_k^I$ に対して，

$$\det{}_{n,k}((\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma(k)})) = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \end{pmatrix}\det{}_{n,k}(E_c)$$

となるので，$\det{}_{n,k}(X)$ は，定義 1.3.2 により，

$$\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\ \sum_{\substack{\sigma\in S_k^I \\ \sigma(K)=c}} \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \end{pmatrix} x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(k),k}\det{}_{n,k}(E_c)$$

$$= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det{}_k({}^tE_cX)\det{}_{n,k}(E_c) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \mathrm{sgn}_I(c)\det{}_k({}^tE_cX)$$

となる．ただし，最後の等号は規格化の定理 1.4.13 による． ■

前にも述べたが，この定理と同内容の結果が，定理 2.4.4 にも与えられている．

1.5 正方行列の対角化

1.3.2 項の n 次正方行列の幾何学的意味の小項で説明したように，対角行列の作用を直交座標系で見てみると，各対角成分の値は各座標へ働く倍率を与えている．したがって，対角行列は数に準じた性質をもつことがわかる．一般の正方行列も座標変換をすることにより，対角行列と見なすことができれば，同じような解釈をすることができ，行列のもつ意味がわかる．例えば，2 次対称行列

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して，2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ における原点を中心とする θ の回転

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を用いると，

$$U(-\pi/4)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}U(\pi/4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と表せるので，直交座標軸を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ の代わりに，$\{U(\pi/4)\boldsymbol{e}_1, U(\pi/4)\boldsymbol{e}_2\}$ に選び直せば，最初の対称行列を対角行列として扱うことができる．

例 1.5.1 2 次方程式 $3x^2 - 4xy + 3y^2 = 5$ を表す直交座標 (x, y) を $-\pi/4$ だけ回転した直交座標 (x', y') を使うと，

$$(x', y')\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x, y)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$$

と表せるので，楕円の標準型の方程式 $(x')^2+5(y')^2=5$ が得られる．

高次元の場合にも，対称行列や定義 1.5.5 で説明する直交行列に対して，このような対角化をすることができるが，対角化の議論を一般的に論じるには，複素ベクトル空間で議論する方が都合がよい．そこで，1.5.3 項以降では実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の代わりに複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ で議論をする．複素ベクトル空間は実ベクトル空間の場合と同じように扱えるが，用語等で定義し直さなければならないものもあるので，1.5.3 項へ行ってから，その際に注意した方がよい事項を説明する．応用例の 1 つとして，正定値行列の平方根となる行列を導く．この結果は第 2 章において，線形変換の極分解を記述する際に必要になる．

1.5.1　部分ベクトル空間とその次元

行列の対角化を説明する際に必要となる用語や概念の準備から始めるが，ここで扱う部分ベクトル空間や基底の概念は，線形代数全般を通じての基本概念である．

定義 1.5.2　n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $\mathscr{V}$ に対して，$\mathscr{V}$ の任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ と任意の実数 c,d に対して，ベクトル $c\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{b}$ が再び $\mathscr{V}$ に入るとき，$\mathscr{V}$ を $\mathbb{R}^n$ の**部分ベクトル空間**，あるいは短く**部分空間**という．

例えば，3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において，3 つの実数 a,b,c により決まる部分集合

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ ax+by+cz=0\right\}$$

は部分ベクトル空間になっている．これは，原点を通る平面で，縦ベクトル ${}^t(a,b,c)$ と直交している．このベクトルは平面に対する正規ベクトルとも呼ばれ，規格化したものは平面の方向余弦[11]と呼ばれている．

[11] 規格化された正規ベクトルの座標は，このベクトルと基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ $(i=1,2,3)$ とのなす角 θ_i により決まる余弦 $\cos\theta_i$ により与えられる．

一般に，3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ では，原点だけからなる集合，原点を通る直線や平面，あるいは全空間が部分ベクトル空間になる．

2 つの部分ベクトル空間 $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ の任意の元 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ と $\boldsymbol{y} \in \mathscr{W}$ がいつでも直交しているとき，$\mathscr{V}$ と $\mathscr{W}$ は**直交**するといい，$\mathscr{V} \perp \mathscr{W}$ で表す．

2 つの部分ベクトル空間 $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ により決まる集合

$$\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in \mathscr{V},\ \boldsymbol{y} \in \mathscr{W}\}$$

は再び部分ベクトル空間になる．これを $\mathscr{V}+\mathscr{W}$ と表す．さらに，$\mathscr{V} \cap \mathscr{W} = \{\boldsymbol{0}\}$ の場合には，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathscr{V}$ と $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in \mathscr{W}$ に対して，もし $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'$ ならば，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ かつ $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$ となるので，部分ベクトル空間 $\mathscr{V}+\mathscr{W}$ の元が一意的に $\mathscr{V}$ の元と $\mathscr{W}$ の元の和に分解される．このとき，これを $\mathscr{V}$ と $\mathscr{W}$ の**直和**といい，$\mathscr{V} \oplus \mathscr{W}$ で表す．

m 個の n 次ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ と定数 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ から作られる新たなベクトル $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$ を，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の **1 次結合**という．

ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 $\mathscr{B}$ に対し，$\mathscr{B}$ の任意の有限個の元の 1 次結合全体のなす集合は $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間になる．これを $\mathscr{B}$ の**生成する**または**張る**部分ベクトル空間という．$\mathscr{B}$ が有限集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ の場合には，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の生成するまたは張る部分ベクトル空間という言い方もする．

つぎに，ベクトル空間の幾何学的な意味を理解する上で，最も基本的になる概念を導入する．

定義 1.5.3 m 個の n 次ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ に対して，

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$

が成り立つとき，集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ は **1 次独立**（または線形独立）であるという．また，有限個の零ベクトルでないベクトルからなる集合が 1 次独立でないときには，**1 次従属**（または線形従属）であるという．

例えば，$\mathbb{R}^3$ において，3 つの零でないベクトルが 1 次独立であれば，すべてのベクトルがこの 3 つのベクトルの 1 次結合で表せるが，1 次従属だと，

この 3 つのベクトルの張る部分ベクトル空間は平面または直線につぶれてしまう.

したがって，零ベクトルではないベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ が 1 次従属であるとは，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$ となる $(c_1, \ldots, c_m) \neq (0, \ldots, 0)$ が存在することである.

つぎに，ベクトル空間における座標軸に相当する概念を導入する.

定義 1.5.4　部分ベクトル空間 $\mathscr{V}$ に 1 次独立なベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ が存在し，$\mathscr{V}$ のすべてのベクトルが，この n 個のベクトルの 1 次結合で表せるとき，その集合を部分ベクトル空間 $\mathscr{V}$ の**基底**という．また，このときの，n を $\mathscr{V}$ の**次元**といい，$\dim(\mathscr{V})$ で表す．とくに，基底の元が $(\boldsymbol{a}_i|\boldsymbol{a}_j) = \delta_{i,j}$ を満たすときには，**規格直交基底**という.

上の次元の定義が意味をもつためには，n という数が基底の選び方によらないことを示す必要がある．その証明は第 2 章の定理 2.1.7 で与える.

n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において，自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は規格直交基底である.

定義 1.5.5　$n \times m$ 行列 A に対して，集合

$$\{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\} \quad と \quad \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

をそれぞれ，A の**像**（または**値域**），A の**核**（または**零空間**）といい，$\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$ で表す.

問題 30　$n \times m$ 行列 A に対して，つぎを示せ.
(i)　A の像は $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間である.
(ii)　A の核は $\mathbb{R}^m$ の部分ベクトル空間である.

1.5.2　直交行列

n 次元ベクトル空間において,「原点を中心とする回転」または「ある部分ベクトル空間に関する折り返し」を与える行列について説明する.

定義 1.5.6 n 次正方行列 T が ${}^tTT = 1_n$ を満たすとき，T を**直交行列**という.

系 1.3.13 の (iii) により，直交行列 T の転置行列 ${}^tT$ は T の逆行列でもある．つぎに，直交行列が満たす性質を挙げておく.

(i) 2 つの直交行列の積は直交行列である.

(ii) 直交行列の逆行列も，転置も直交行列である.

(iii) 直交行列の行列式の値は 1 または -1 である.

一般に，行列が直交であるという性質は積で保存され，積は結合法則を満たしている．また，単位行列 1_n も，直交行列の逆行列も直交行列である．したがって，n 次直交行列全体のなす集合は群になる．これを $\boldsymbol{n}$ **次直交群**といい，$O(n)$ で表す.（複素行列の場合にも直交行列を考えたいときには，$O(n,\mathbb{C})$ で表す.）また，直交行列の中でも，行列式の値が 1 となるものの全体

$$SO(n) = \{T \in O(n) \mid \det{}_n(T) = 1\}$$

は n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ における回転を与え，$\boldsymbol{n}$ **次回転群**（または $\boldsymbol{n}$ **次特殊直交群**）といわれている．定義 1.3.4 で与えた向きという用語を用いると，直交変換が $SO(n)$ の元であるかどうかは，その列ベクトルの向きが正か負かに対応している．この直交変換は，4.2 節と付録 B において，中心的な役割を果たす.

命題 1.5.7 n 次正方行列 $T = (\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n)$ に対して，つぎの 3 条件は同値であることを示せ.

(i) $T \in O(n)$，すなわち，T は直交行列である.

(ii) 列ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ における規格直交基底である.

(iii) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\|T\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) $(\boldsymbol{t}_i|\boldsymbol{t}_j) = (T\boldsymbol{e}_i|T\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i|{}^tT\,T\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = \delta_{i,j}$．したがって，$\{\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n\}$ は規格直交系である．また，行列 T は正則であるから，$T\,\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ となり，$\{\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n\}$ は基底である.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\|T\boldsymbol{x}\|^2 = (T\boldsymbol{x}|T\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|{}^tT\,T\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$.

(iii) ⇒ (i) つぎの式

$$4(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}|{}^tTT\boldsymbol{y}) = (T\boldsymbol{x}|T\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{4}(\|T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2 - \|T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

ゆえに, $(\boldsymbol{x}|({}^tTT-1_n)\boldsymbol{y}) = 0$ が任意の $\boldsymbol{x}$ に対して成り立つ. よって, $({}^tTT-1_n)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ がすべての $\boldsymbol{y}$ に対して成り立つ. ゆえに, T は直交行列である. ■

n 次直交行列は, 長さを変えない変換の 1 つとして使われることが多いが, その座標変換も, $\mathbb{R}^n$ の中での回転を与える $SO(n)$ の元と, 折り返しを与える $O(n)\setminus SO(n)$ の元の 2 つに分けられる. 折り返しは空間の次元を 1 つ上げた $n+1$ 次元ベクトル空間における回転として実現されるが, もとの n 次元ベクトル空間の中でどんなに平行移動や回転を繰り返しても実現することはできない.

直交変換は直交座標系の間の変換を与える. コーシーの定理 1.3.12 を使うと, $X \in M_n(\mathbb{R})$ と $T \in O(n)$ に対して,

$$\begin{aligned}\det{}_n(T^{-1}XT) &= \det{}_n({}^tTXT) = \det{}_n({}^tT)\det{}_n(X)\det{}_n(T)\\ &= \det{}_n({}^tTT)\det{}_n(X) = \det{}_n(X)\end{aligned}$$

が成り立つので,「正方行列の行列式の値は直交座標系の選び方によらない」ことがわかる.

1.5.3　実ベクトル空間から複素ベクトル空間へ

実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と同じように, 複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ を考えることができ, 1.5.1 項で与えられた定義はすべて複素ベクトル空間の場合にも, 同じように考えることができる.

実数 $\mathbb{R}$ が複素数 $\mathbb{C}$ の部分集合であるのと同じように, 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の部分集合でもある. したがって, これまでに説明

してきた内容の大部分で，ベクトルや行列の成分，あるいは定数倍の定数を実数から複素数に書き換えても，同じことがいえる．そこで，ここでは，複素ベクトル空間を取り扱う際に，注意しなければならない点を挙げておく．

註 3　$\mathbb{C}^n$ を複素ベクトル空間というのは，定数倍の演算を複素数で考えるという意味であって，**この定数倍の演算を実数に制限した場合には**，$2n$ 個の元からなる集合

$$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n\}$$

がベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の基底になるので，次元が $2n$ の実ベクトル空間になる．そこで，今後とくに**断らない限り** $\mathbb{C}^n$ **における定数倍の演算は複素数で考える**ことにする．

(i) ノルムは

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2}.$$

(ii) 内積は

$$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = \overline{a_1}b_1 + \overline{a_2}b_2 + \cdots + \overline{a_n}b_n$$

であるから，$(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}) = \overline{(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})}$，$(\boldsymbol{a}|c\boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = (\bar{c}\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$．**ここでの内積の定義は，行列の積演算と整合性がよいように，物理の教科書に合わせて，第 1 変数は共役線形，第 2 変数は線形**

$$(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}) = \overline{a}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) + \overline{b}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}), \quad (\boldsymbol{x}|a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$$

とし，通常の数学の教科書とは違っている．（ただし，$\mathbb{C}^n$ を実ベクトル空間として見るときの内積は $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ で考える[12].）

(iii) 縦ベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して，横ベクトル

$$(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$$

を $\boldsymbol{a}$ の**共役転置**（きょうやくてんち）といい，$\boldsymbol{a}^*$ で表す．また横ベクトル $\boldsymbol{a}^*$ の共役転置を $\boldsymbol{a}$ と定め，$(\boldsymbol{a}^*)^*$ で表す．$(\boldsymbol{a}^*)^* = \boldsymbol{a}$ である．内積 $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$ の値は行列の積 $\boldsymbol{a}^*\,\boldsymbol{b}$ である 1 次正方行列の成分の値と一致している．そこで，今後 1 次正方行列はその成分と同一視する．

---

[12] 複素数 z の実部を $\mathrm{Re}\,z$ で表す．

(iv) 複素数を成分にもつ行列を必要があれば，**複素行列**という．複素行列 A に対しては，転置 ${}^tA$ の他に，**随伴**（ずいはん）A^* という演算が新たに加わる．これは，行列の成分で書くと，$n \times m$ 行列 $A = (a_{i,j})$ に対して，(i,j) 成分に $a_{j,i}$ の複素共役 $\overline{a_{j,i}}$ をもつ $m \times n$ 行列になっている．そこで，この随伴の演算を**共役転置**ともいう．内積を使うと

$$(A^*\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}|A\boldsymbol{b})$$

と表され，内積との整合性もよいので，複素ベクトル空間では，転置よりも広く利用されている．随伴に関しても，転置と同じような式

$$(A^*)^* = A, \quad (A+B)^* = A^* + B^*,$$
$$(cA)^* = \overline{c}A^*, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

が成り立つ．もちろん，行列の成分がすべて実数のときは，随伴は転置そのものである．

(v) $A^* = A$ を満たす正方行列を**自己随伴**行列または**エルミート**行列，$A^* = -A$ を満たす正方行列を**歪随伴**（わいずいはん）行列という．もちろん，成分がすべて実数のときの自己随伴行列は対称行列であるし，歪随伴行列は交代行列である．また，自己随伴行列と歪随伴行列は虚数単位 i を掛けることにより，互いに入れ替わる．

(vi) $A^*A = AA^* = 1_n$ を満たす正方行列を，**ユニタリ**行列または短くユニタリという．もちろん，成分がすべて実数のときのユニタリ行列は直交行列である．

(vii) $A = A^2 = A^*$ を満たす正方行列を，**射影**行列または短く射影という．もちろん，成分がすべて実数のときの射影行列は実ベクトル空間での射影行列である．

複素ベクトル空間において，原点と長さを保存する線形変換はユニタリ行列で与えられ，実ベクトル空間における直交行列と同じような性質を満たしている．

問題 31　n 次複素正方行列 $U = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ に対して，つぎの 3 条件は同値であることを示せ．

(i) U はユニタリ行列である．
(ii) 列ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ における規格直交基底である．
(iii) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\|U\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$.

問題 32　つぎの内積の極分解を示せ．ただし，i は虚数単位である．

$$4(\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{y}) = \sum_{k=0}^{3} i^k (i^k\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|A(i^k\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})).$$

1.5.4　固有値と固有ベクトル

1826 年にコーシーが 2 次形式を通じて行った，行列の固有値と対角化に関する議論は，個々の行列のもつ内容を把握する場合に，最も基本的である．その後スツルムは連立常微分方程式を固有値問題という形に捉えることにより，固有値のもつ意味を一気に拡大した．さらに，ヒルベルトはこの考え方を積分方程式に適用し，ヒルベルト空間論の確立へとつながっていく．

定義 1.5.8　n 次の複素正方行列 A に対し，方程式

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

を満たす零でない n 次ベクトル $\boldsymbol{x}$ と複素数 λ が存在するとき，λ を行列 A の**固有値**，$\boldsymbol{x}$ を λ に対応する行列 A の**固有ベクトル**という．

ここで，方程式 $(A - \lambda 1_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ 全体のなす集合は $\mathrm{Ker}(A - \lambda 1_n) \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ と表せるので，これが空集合でない場合の部分ベクトル空間 $\mathrm{Ker}(A - \lambda 1_n)$ を，固有値 λ に対応する固有部分ベクトル空間または短く λ の**固有空間**という．したがって，行列 A の核 $\mathrm{Ker}(A)$ は固有値 0 の固有空間である．また，固有空間 $\mathrm{Ker}(A - \lambda 1_n)$ の次元を固有値 λ の**重複度**という．同じ固有値に対応するベクトルには 1 次独立なものが重複度の数だけ存在することになる．

例 1.5.9　(i) 例 1.5.1 に現れた対称行列（自己随伴行列でもある）

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めてみよう．そこで，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とする．$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ として，この式をベクトルの成分を使って書き直すと，連立方程式

$$\begin{cases} (3-\lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (3-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

が得られる．$x \neq 0$ の場合にこれらの式の両辺を x で割ると

$$(3-\lambda) - 2\frac{y}{x} = 0, \quad -2 + (3-\lambda)\frac{y}{x} = 0. \tag{1.3}$$

後ろの両辺を 2 倍して，前の式の $2y/x$ を代入してを消去すると

$$-2^2 + (3-\lambda)^2 = 0$$

となる．これを λ について解くと，λ は 5 または 1 である．つぎに，$\lambda = 5$ を (1.3) 式に代入すると $y/x = -1$，$\lambda = 1$ を代入すると $y/x = 1$ となることがわかる．したがって，$\lambda = 5$ に対応する固有空間は

$$\{x\boldsymbol{e}_1 - x\boldsymbol{e}_2 \mid x \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2).$$

同様に，$\lambda = 1$ に対応する固有空間は $\mathbb{C}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$ である．$y \neq 0$ の場合も同様に議論できて，同じ固有値と固有空間が得られる．

(ii) A が実正方行列であっても，作用するベクトル空間を複素ベクトル空間にしておけば，固有値は複素数になることがある．そのような例として，直交行列（ユニタリでもある）

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを考えてみよう．そこで，$U\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とする．$\boldsymbol{x} = {}^t(x, y)$ として，この式をベクトルの成分を使って書き直すと，連立方程式

$$\begin{cases} (\cos\theta - \lambda)x - \sin\theta\ y = 0 \\ \sin\theta\ x + (\cos\theta - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

になる．$x \neq 0$ の場合にこれらの式の両辺を x で割ると

$$(\cos\theta - \lambda) - \sin\theta\,\frac{y}{x} = 0, \quad \sin\theta + (\cos\theta - \lambda)\,\frac{y}{x} = 0. \tag{1.4}$$

連立方程式を解くときの消去法を用いて，y/x を消去すると

$$(\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0$$

となる．よって，固有値は複素数 $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$ である．これを (1.4) 式に代入すると，$y/x = \mp i$ となる．よって，固有値が $e^{i\theta}$ に対応する固有空間は $\mathbb{C}(\boldsymbol{e}_1 - i\boldsymbol{e}_2)$，固有値が $e^{-i\theta}$ に対応する固有空間は $\mathbb{C}(\boldsymbol{e}_1 + i\boldsymbol{e}_2)$ である．$y \neq 0$ の場合も同様に議論できて，同じ固有値と固有空間が得られる．

つぎに，固有値の満たす方程式について説明しよう．ケイリーによる系 1.3.13 は複素行列の場合にも同じように成り立つので，$\det{}_n(A - \lambda 1_n) = 0$ であることと，$\mathrm{Ker}(A - \lambda 1_n) \neq \{\mathbf{0}\}$ であることは必要十分である．したがって，λ に関する n 次多項式

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &= \det{}_n(A - \lambda 1_n)\\ &= \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}\\ &= (-1)^n\lambda^n + \alpha_1(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n \qquad (1.5)\end{aligned}$$

を 0 とおいて得られる n 次方程式の解はすべて行列 A の固有値である．そこで，この多項式 φ_A を行列 A の**固有多項式**といい，これを 0 とおいて得られる方程式を**固有方程式**という．一般に，どんな n 次ユニタリ行列 U に対しても $\det{}_n(UAU^{-1}) = \det{}_n(A)$ が成り立つので，固有多項式は直交座標系の選び方によらず同じ式により与えられる．この多項式の次数は n であるから，重解も含めると n 個の複素数値解 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が存在する[13]．実ベクトル空間に作用する実行列の場合にも，固有方程式を解くことにより，固有値に相当する数値を求めることができるが，値が実数でない場合には方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ は意味をもたない．

[13] 代数学の基本定理により，複素係数の n 次方程式は n 個の解をもつ．ただし，重解は重複も込めて数える．

n 次の複素正方行列 A の固有値全体のなす集合を A の**スペクトル**といい，$\mathrm{Sp}(A)$ で表す．上の議論で，固有方程式の次元が n であることから，スペクトルの元の個数は n 以下であることがわかる．

また，各固有空間は A の作用に関して不変，つまり

$$A\,\mathrm{Ker}(A-\lambda_j 1_n) \subset \mathrm{Ker}(A-\lambda_j 1_n)$$

が成り立つ．しかも，値の違う固有値に対応する固有空間は互いに零ベクトル以外に共通部分をもたない．実際，$\lambda_i \neq \lambda_j$ に対して，$A\boldsymbol{x} = \lambda_i \boldsymbol{x}$ かつ $A\boldsymbol{x} = \lambda_j \boldsymbol{x}$ ならば，$(\lambda_i - \lambda_j)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるので，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$．そこで，このような固有空間の重複度は，固有方程式の解の重複度と一致している．したがって，スペクトルの元ごとに，固有空間が決まり，それらの直和が全空間 $\mathbb{C}^n$ になっている．

問題 33　つぎの行列の固有値と固有空間を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

n 次正方行列 A に対して，(1.5) 式により与えられる固有多項式 $\varphi_A(\lambda)$ の展開係数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は，直交座標系の選び方によらないので，線形変換としての A に固有の量であることがわかる．これらの係数 α_k の値は，ここでは，k が 1 と n の場合に

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \alpha_n = \det{}_n(A)$$

となることだけはわかる．実際，固有多項式は $\varphi_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j)$ と表せるので，$(-\lambda)^{n-1}$ の係数 α_1 は $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ であるし，定数項 α_n は，(1.5) 式で $\lambda = 0$ とすれば，$\det{}_n(A)$ となる．残りの係数も，後に説明するグラスマン代数を使うと，

$$\alpha_k = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det{}_k(E_c^* A E_c) \quad (k = 2, \ldots, n-1)$$

により与えられることがわかるが，証明は省く．

1.5.5 自己随伴行列の対角化

ここでは自己随伴行列の対角化だけを論じるが，このような対角化は，問題 34 で説明する正規行列ならば，いつでも可能である．正規でない場合には対角化はできない．しかし，それと似たジョルダン標準型にはできることが知られているが，本書では必要にならないので立ち入らない．

定理 1.5.10（対角化） A を n 次自己随伴行列とする．このとき，

(i) A の固有値はすべて実数である．

(ii) 重複を込めた固有値の集合を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ とすると，

$$U^* AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

を満たすユニタリ行列 U が存在する[14]．

証明 (i) $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とする．A が自己随伴ならば，

$$\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}).$$

$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ であるから，λ は実数である．

(ii) $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i$ かつ $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ ならば，A は自己随伴であるから，

$$\lambda_j(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j) = (\boldsymbol{x}_i|A\boldsymbol{x}_j) = (A\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j) = \lambda_i(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j).$$

したがって，$\lambda_i \neq \lambda_j$ ならば，$(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j) = 0$ となり，固有値の値の違う固有空間は互いに直交している．このとき，各固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ を規格化しておけば，n 次正方行列 $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ は，問題 31 により，ユニタリである．この行列を U とすれば，

$$\begin{aligned} AU &= A(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) = (A\boldsymbol{x}_1, \dots, A\boldsymbol{x}_n) \\ &= (\lambda_1\boldsymbol{x}_1, \dots, \lambda_n\boldsymbol{x}_n) = U\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{aligned}$$

となる．よって，$U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と表せる． ■

---

14 $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U E_{i,i} U^*$ を A のスペクトル分解という．ただし，$E_{i,i}$ は λ_i の固有空間への射影である．

問題 34　つぎのことを示せ.

(i) 正方行列 X は2つの自己随伴行列 H, K を用いて, $H + iK$ と一意的に表される.

(ii) (i) において, X が $X^*X = XX^*$ を満たすための必要十分条件は $HK = KH$ である. (このとき, 行列 X は正規であるという.)

註 4　n 次正方行列 X の固有空間どうしが互いに直交するするための必要十分条件は X が正規なことである.

問題 35　n 次ユニタリ行列 A に対して, つぎのことを示せ.

(i) A の固有値はすべて絶対値が1の複素数である.

(ii) 重複を込めた固有値の集合を $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ とすると,

$$U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

を満たすユニタリ行列 U が存在する.

実直交行列は要素がすべて実数のユニタリ行列でもあるから, 固有値はやはり絶対値が1の複素数である.

1.5.6　正定値行列

自己随伴行列の対角化の有効な応用例として, 第2章以降で必要になる, 正定値行列の平方根と矩形行列の絶対値について説明しよう.

定理 1.5.11　n 次複素正方行列 A に対し, つぎの3つの主張は同値である.

(i) A が, ある n 次正方行列 B により, $A = B^*B$ と表される.

(ii) 任意の n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して, $(\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{x}) \geq 0$.

(iii) A は自己随伴で, その固有値はすべて非負である.

証明　(i) $\Rightarrow$ (ii) $(\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|B^*B\boldsymbol{x}) = \|B\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば, $\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{x}) \geq 0$. ゆえに, 固有値 λ は非負である. また, $(\boldsymbol{z}|A\boldsymbol{z}) = \overline{(\boldsymbol{z}|A\boldsymbol{z})} = (A\boldsymbol{z}|\boldsymbol{z})$ であるから, これを使うと, 問題32の内積の極分解により,

$$4(\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{y}) = \sum_{k=0}^{3} i^k(i^k\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|A(i^k\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}))$$

$$= \sum_{k=0}^{3} i^k (A(i^k \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) | i^k \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = 4(A\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = 4(\boldsymbol{x}|A^*\boldsymbol{y}).$$

ゆえに，A は自己随伴である．

(iii) ⇒ (i) 行列 A は自己随伴であるから，定理 1.5.10 により，$U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ となるユニタリ行列 U が存在する．固有値はすべて非負であるから，その平方根を用いて，

$$B = U\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})U^*$$

とすれば，

$$B^* = (U\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})U^*)^* = U\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^*U^* = B,$$
$$B^2 = (U\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})U^*)^2 = U\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^2U^* = A$$

となる． ■

正方行列 A が，この定理のいずれかの条件を満たすとき，**正定値**または単に**正**といい[15]，$A \geq 0$ で表す．

系 1.5.12 正定値行列 A に対して，$A = B^2$ を満たす正定値行列 B が一意的に存在する．

証明 正定値行列 A に対して，定理 1.5.11 の (iii) ⇒ (i) の証明の中で使われた行列 B は自己随伴で，スペクトルの元はすべて非負であるから，行列としても正である．しかも $A = B^2$ を満たしている．他方，正定値行列 C が $A = C^2$ を満たせば，C の固有値 μ は非負であり，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{y}$ とすれば，

$$A\boldsymbol{y} = C^2\boldsymbol{y} = C(C\boldsymbol{y}) = C(\mu\boldsymbol{y}) = \mu C\boldsymbol{y} = \mu^2\boldsymbol{y}.$$

したがって，この式により，C の固有空間 $\mathrm{Ker}(C - \mu 1_n)$ は A の固有空間 $\mathrm{Ker}(A - \mu^2 1_n)$ に含まれる．よって，$\mu^2 \in \mathrm{Sp}(A)$．このとき，$\mu = \sqrt{\mu^2}$ となるから，$\mathrm{Sp}(C) \subset \mathrm{Sp}(B)$ が成り立つ．したがって，$\mu \neq 0$ の場合には，

$$(B - C)\boldsymbol{y} = \frac{1}{2\mu}(B - C)(B + C)\boldsymbol{y} = \frac{1}{2\mu}(B^2 - C^2)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}.$$

[15] 非負定値ということもある．

$\mu = 0$ の場合には，$C\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となるので，$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$．したがって，$B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ でもあり，$(B - C)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$．$C$ の固有空間の全体は全空間 $\mathbb{C}^n$ を生成するので，$\mathbb{C}^n$ の任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ はこれら固有空間のベクトルの 1 次結合で表せ，$(B-C)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．ゆえに，$C = B$ となり B が一意的に定まる．■

そこで，この系 1.5.12 で定まる正定値行列 B を正定値行列 A の**平方根**といい，$A^{1/2}$ で表す．また，矩形行列 X から得られる正定値行列 X^*X の平方根 $(X^*X)^{1/2}$ を，X の**絶対値**といい，$|X|$ で表す．この行列の絶対値が第 2 章以降で矩形行列の行列式の幾何学的な解釈を考えるときに役に立つ．

例 1.5.13　対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

の固有値は，固有方程式 $(\lambda - 14)^2 - 11^2 = 0$ の解は 25 と 3 である．したがって，A は正定値行列である．また，固有値 25 に対する固有空間は $\mathbb{R}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$ であり，固有値 3 に対する固有空間は $\mathbb{R}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)$ である．そこで

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば，U は直交行列で，$A = U\mathrm{diag}\,(25, 3)\ {}^tU$．したがって，

$$A^{1/2} = U\,\mathrm{diag}(5, \sqrt{3})\ {}^tU = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5+\sqrt{3} & 5-\sqrt{3} \\ 5-\sqrt{3} & 5+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

問題 36　$x^n = 1$ の解 ω のうち，$\omega^k \neq 1$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ を満たすもの[16]を用いて，つぎの式を示せ．

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}(x_1 + \omega^k x_2 + \cdots + \omega^{k(n-1)} x_n).$$

[16] 原始 n 乗根と呼ばれている．

第2章　Cullis行列式の一般的な取り扱い

第1章の議論では，あらかじめ与えられた直交座標系の座標の値を用いてベクトルが定義されていたが，この章以降では，2.1.1項で説明する抽象的な複素ベクトル空間を用いて議論を展開するので，座標系は，2.1.3項で説明する基底を1つ固定してからでないと，決めることができない．また，本書では，主に抽象的な複素ベクトル空間に，定義2.1.11により定まる抽象的な内積を1つ固定した，内積空間と呼ばれる空間を用いて議論を展開する．この空間では，ベクトルの大きさを与えるノルムや，ベクトルどうしの直交性を，この内積を用いて考える．その際，規格直交性を満たす基底は無数に存在するので，その中の1つを固定して初めて直交座標系が定まる．内積空間上に作用する線形変換は，この直交座標系上の行列と見なすことができるので，第1章の結果はそのまま内積空間上に読み替えることができる．しかし，固定する規格直交系を変えると，対応する行列もまた変わってくるので，この章の内積空間の内容は第1章のベクトル空間をその特殊な場合として含んでいることがわかる．その結果，座標系の決め方に依存しない性質や，行列の一般論を論じる際には，このような抽象的ベクトル空間の方が議論しやすいことが多い．

そこで，前章の定義1.5.2において与えた，矩形行列に対するCullis行列式の定義を，この章の定義2.3.2において，ある規格化条件を満たす交代多重線形汎関数として定義し直し，本書を2.3節から読み始めてもCullis行列式の定義がわかるようになっている．この定義が第1章のものと同値であることは，そこで示したCullis行列式の基本性質に関する交代多重線形性（定理1.4.11），規格化条件（定理1.4.13），矩形行列式の正方行列による展開式（定理1.4.9）および第2章の矩形行列式の一般展開式（命題2.3.6）よりわか

る．実は，第 3 章へ行ってから詳しく説明するが，行列式をこのように定義し直しはしたが，Cullis 行列式は直交座標系の与え方に依存する対象である．しかし，このような行列式の書き換えの結果，行列式の見方に幅ができ，2.4 節では Cullis 行列式の特徴付けができ，2.5 節では Cullis 行列式のラプラス展開も可能になる．その結果，正方行列だけでなく矩形行列に対しても交代冪行列を考えることができるようになり，その結果は 4.1 節に行ってから利用される．最後の 2.6 節は次章への橋渡しとして，矩形行列式の右乗法性が示されている．

2.1　内積空間と線形変換

ここでは縦ベクトルのベクトル空間を抽象化して座標によらないベクトル空間を定義し，横ベクトルの空間をその双対空間[1]として捉え直すことにする．このような抽象化を通じて，ベクトル空間の取り扱いが簡素化され，見通しもよくなり，ベクトル空間に関する意識の世界が一気に広がることがわかる．

2.1.1　縦ベクトルのベクトル空間

まず，n 次複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ における加法と定数倍の演算

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad a\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$$

を次元を示す整数 n を無視してつぎのように一般化する．

定義 2.1.1　空でない集合 $\mathscr{V}$ に下の 8 つの条件を満たす加法と定数倍の演算

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathscr{V} \times \mathscr{V} \longmapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathscr{V},$$
$$(a, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{C} \times \mathscr{V} \longmapsto a\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$$

[1] 定義 2.1.8 を参照.

が与えられているとき，$\mathscr{V}$ を**複素ベクトル空間**といい，その元を**ベクトル**という．

(i) 加法に関する条件

(a)（交換法則）$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$.
(b)（結合法則）$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$.
(c)（零元の存在）すべての $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$ を満たす共通のベクトル $\boldsymbol{0}$ が存在する．
(d)（逆元の存在）各 $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{y}$ が存在する．

(ii) 加法と定数倍に関する条件

(a)（結合法則）$(ab)\boldsymbol{x}=a(b\boldsymbol{x})$.
(b)（分配法則）$(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$.
(c)（分配法則）$a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$.
(d) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

以後，(i) の (c) のベクトル $\boldsymbol{0}$ を**零ベクトル**という．また，(i) の (d) のベクトル $\boldsymbol{y}$ は，$\boldsymbol{x}$ に対して一意的に定まるので，$-\boldsymbol{x}$ で表す．さらに，$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})$ を $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ と書くことにする．(ii) の (b) により，$1\boldsymbol{x}=(0+1)\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}+1\boldsymbol{x}$ となるので，(i) の (c), (d), (b) を用いて，

$$0\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{x}+(1\boldsymbol{x}-1\boldsymbol{x})=(0\boldsymbol{x}+1\boldsymbol{x})-1\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}-1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

また，(ii) の (b) により，$(-a)\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}$ となるので，

$$\begin{aligned}(-a)\boldsymbol{x}&=(-a)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=(-a)\boldsymbol{x}+(a\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{x})\\&=((-a)\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{x})-a\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}-a\boldsymbol{x}=-a\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

定数倍するときの数を複素数の代わりに，実数に制限しても，同じようにベクトル空間を定義することができる．これを**実ベクトル空間**という．以下，断らない限り，複素ベクトル空間を用いて話を進めるが，実数は複素数の一部であるから，そこで得られた結果はそのまま実ベクトル空間の場合にも同じように成り立つ．

定義 2.1.2　ベクトル空間 $\mathscr{V}$ の部分集合 $\mathscr{W}$ が

$$a, b \in \mathbb{C} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{W} \Longrightarrow a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in \mathscr{W}$$

を満たすとき，$\mathscr{W}$ を $\mathscr{V}$ の**部分ベクトル空間**という．手短に**部分空間**と略していうことが多い．

例 2.1.3　(i) $n \times m$ 複素行列全体のなす集合 $M_{n,m}(\mathbb{C})$ は通常の行列の加法と定数倍の演算によりベクトル空間である．

(ii) 空でない集合 D 上の関数全体のなす集合 $\mathscr{F}(D)$ は加法 $f+g$ と定数倍 af を各点ごとに

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (af)(x) = af(x)$$

で定義すれば，ベクトル空間である．

(a) $D = \{1, 2, \ldots, n\}$ の場合には，$f \in \mathscr{F}(D)$ に，n 次元ベクトル ${}^t(f(1), \ldots, f(n)) \in \mathbb{C}^n$ を対応させることにより，$\mathscr{F}(D)$ は n 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ と同一視される．

(b) $D = \{(i,j) \mid i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$ の場合には，$f \in \mathscr{F}(D)$ に，$x_{i,j} = f(i,j)$ とおいて得られる行列 $X = (x_{i,j}) \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ を対応させることにより，$\mathscr{F}(D)$ は $M_{n,m}(\mathbb{C})$ と同一視される．

(c) 閉区間 $[0,1]$ 上の関数には連続でないものも存在するので，連続関数全体のなす集合 $C([0,1])$ は $\mathscr{F}([0,1])$ の部分ベクトル空間になっている．

以後，$n \times n$ 複素行列全体の集合 $M_{n,n}(\mathbb{C})$ を $M_n(\mathbb{C})$ で表す．実行列の場合には，$\mathbb{C}$ の代わりに，$\mathbb{R}$ を使う．

2.1.2　線形変換

つぎに，複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ における行列の概念を一般化する．

定義 2.1.4 ベクトル空間 $\mathscr{V}$ からベクトル空間 $\mathscr{W}$ への写像 X が加法と定数倍の演算を

$$X(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = X\boldsymbol{x} + X\boldsymbol{y}, \quad X(a\boldsymbol{x}) = aX\boldsymbol{x}$$

のように保存するとき，X を**線形変換**または線形作用素という．とくに，値域 $\mathscr{W}$ が 1 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}$ の場合の線形変換を**線形汎関数**または 1 次形式という．

以後，加法と定数倍の演算を一括して得られる X の性質

$$X(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) = aX\boldsymbol{x} + bX\boldsymbol{y}$$

を**線形性**という．

1.2 節でも述べたように，$n \times m$ 行列はベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ からベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ への線形変換である．線形変換は写像の中でも，ベクトル空間の線形構造（加法と定数倍の演算）を保存する写像ということになる．

線形変換 $X : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ が与えられているときに，$\mathscr{V}$ の元 $\boldsymbol{x}$ に $\mathscr{W}$ の元 $-X\boldsymbol{x}$ を対応させる変換は線形で，これを $-X$ で表す．つまり $(-X)\boldsymbol{x} = -X\boldsymbol{x}$ である．また $\mathscr{V}$ の任意の元を $\mathscr{W}$ の零ベクトル $\boldsymbol{0}$ に対応させる変換も線形で，これを 0 で表す．つまり $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．また $\mathscr{V}$ の任意の元 $\boldsymbol{x}$ に対して $1_{\mathscr{V}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たす $\mathscr{V}$ から自分自身への変換 $1_{\mathscr{V}}$ を**恒等変換**といい，添え字の $\mathscr{V}$ を省いて，単に 1 で表すことが多い．これらの線形変換 0 と 1 はともに数字と紛らわしいが，前後の文脈から識別することができる．

今後，ベクトル空間 $\mathscr{V}$ からベクトル空間 $\mathscr{W}$ への線形変換全体のなす集合を $\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})$ で表す．とくに，$\mathscr{V}=\mathscr{W}$ の場合には，$\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{V})$ を $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ で表す．$\mathscr{V}=\mathbb{C}^m$, $\mathscr{W}=\mathbb{C}^n$ の場合には，1.2 節末の議論と同じようにして，$\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W}) = M_{n,m}(\mathbb{C})$ となる．

問題 37 線形変換 $X, Y \in \mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})$ に対して，加法と定数倍の演算を

$$(X+Y)\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{x} + Y\boldsymbol{x}, \quad (aX)\boldsymbol{x} = aX\boldsymbol{x}$$

で定義すれば，$\mathscr{L}(\mathscr{V},\mathscr{W})$ は再びベクトル空間になることを示せ．

行列に関する問題 30 と同様なことが，線形変換に対してもいえる．繰り返しになるが，再度問題にしておく．

問題 38　線形変換 $X \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に対して，つぎのことを示せ．
(i) 集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathscr{V} \mid X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は $\mathscr{V}$ の部分ベクトル空間である．
(ii) 集合 $\{X\boldsymbol{x} \in \mathscr{W} \mid \boldsymbol{x} \in \mathscr{V}\}$ は $\mathscr{W}$ の部分ベクトル空間である．

ベクトル空間 $\mathscr{V}$ からベクトル空間 $\mathscr{W}$ への線形変換 X に対して，$\mathscr{W}$ から $\mathscr{V}$ への写像 Y で，$YX = 1_{\mathscr{V}}$ かつ $XY = 1_{\mathscr{W}}$ を満たすものが存在するとき，X は**可逆**であるという．このとき，Y は自動的に線形性を満たすので，線形変換である．これを X の**逆変換**といい，X^{-1} で表す．行列の場合には，可逆性と正則性は同じである．

問題 39　逆変換は線形変換であることを示せ．

2.1.3　ベクトル空間と座標

上で定義した複素ベクトル空間には，前章で扱ったベクトル空間 $\mathbb{R}^n$（または $\mathbb{C}^n$）における自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ のような，自然に考えられる基底は存在しない．そこで，このような基底を考えるための準備として，複素ベクトル空間の場合にも，定義 1.5.2 で説明した 1 次独立性の概念を一般化しておく．

定義 2.1.5　ベクトル空間 $\mathscr{V}$ の零でないベクトルのなす部分集合 $\mathscr{B}$ に対して，$\mathscr{B}$ に属する任意有限個の元 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が条件

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0} \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_k = 0$$

を満たすとき，$\mathscr{B}$ は **1 次独立**であるといい，満たさないとき **1 次従属**であるという．

もちろん，ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ において，自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は 1 次独立である．

ベクトル空間 $\mathscr{V}$ の任意有限個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ に対して，複素数 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ を掛けて，加え合わせて得られる新たなベクトル

$$a_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{x}_k$$

を，ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ の **1 次結合**という．$\mathscr{V}$ の部分集合 $\mathscr{B}$ に対して，$\mathscr{B}$ の任意有限個の元の 1 次結合全体のなす集合は $\mathscr{V}$ の部分ベクトル空間になる．これを $\mathscr{B}$ の**張る**，あるいは $\mathscr{B}$ の**生成する**部分ベクトル空間という．

ベクトル空間 $\mathscr{V}$ の部分ベクトル空間 $\mathscr{W}_1, \ldots, \mathscr{W}_n$ に対して，集合

$$\{\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n \mid \boldsymbol{x}_1 \in \mathscr{W}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathscr{W}_n\}$$

は再び $\mathscr{V}$ の部分ベクトル空間になるので，これを $\mathscr{W}_1 + \cdots + \mathscr{W}_n$ で表す．

定義 2.1.6 ベクトル空間 $\mathscr{V}$ の 1 次独立な部分集合 $\mathscr{B}$ の生成する部分ベクトル空間が全空間 $\mathscr{V}$ と一致するとき，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{V}$ の**基底**という．基底の元の個数が有限のとき，ベクトル空間 $\mathscr{V}$ は**有限次元**であるという．有限でないときには無限次元であるという．

本書ではもっぱら有限次元のベクトル空間を扱う．

定理 2.1.7（**次元**） 有限次元ベクトル空間では，基底に属する元の個数は，基底によらずどれも同一である．

証明 ベクトル空間 $\mathscr{V}$ における 2 組の基底を $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, $\mathscr{B}' = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m\}$ とする．$n < m$ と仮定してみる．$\mathscr{B}$ は基底であるから，各 $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して，

$$\boldsymbol{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \boldsymbol{x}_j$$

を満たす行列 $(a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ が存在する．もし $\sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{0}$ ならば，

$$\sum_{j=1}^{n} \Bigl(\sum_{i=1}^{m} b_i a_{i,j} \Bigr) \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{0}$$

となる．$\mathscr{B}$ は 1 次独立であるから，

$$\sum_{i=1}^{m} b_i a_{i,j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

これは $b_1, \ldots, b_m$ を未知数とする m 元連立 1 次方程式であるが，未知数の

個数 m よりも，方程式の数 n の方が小さいので，$(b_1, \ldots, b_m) \neq (0, \ldots, 0)$ となる解が存在する．このことは $\mathscr{B}'$ が1次独立であることと矛盾する．したがって，$n \geq m$．$\mathscr{B}$ と $\mathscr{B}'$ を入れ替えると逆向きの不等式も得られるので，$n = m$． ■

そこで，$\mathscr{V}$ が有限次元ベクトル空間の場合には，基底に含まれる元の個数を，そのベクトル空間の**次元**と定め，$\dim(\mathscr{V})$ で表す．例えば，例 2.1.3 において，(i) のベクトル空間は nm 次元，(ii) の (c) のベクトル空間は無限次元である．

註 5　無限次元のベクトル空間における基底の存在は，超越的な議論をする際に仮定されるツォルンの補題[2]を使わなければ証明することはできない．

このような基底 $\mathscr{B}$ が有限集合 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ のときには，$\mathscr{B}$ の1次独立性により

$$a_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{b}_n = b_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{b}_n \Longrightarrow a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$$

が成り立つので，写像

$$\pi_{\mathscr{B}} : a_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{b}_n \in \mathscr{V} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{2.1}$$

は全単射な線形変換である．したがって，この対応により，$\pi_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{b}_j) = \boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ となり，ベクトル空間 $\mathscr{V}$ を $\mathbb{C}^n$ と同一視して扱うことができ，この縦ベクトルの成分をベクトルの座標と考えることができる．当然，基底 $\mathscr{B}$ を選び直せば，座標は変わる．新たな基底を $\mathscr{B}' = \{\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2, \ldots, \boldsymbol{b}'_n\}$ とすれば，

$$\boldsymbol{b}'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j}\boldsymbol{b}_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

により定まる n 次正則行列 $C = (c_{i,j})$ により，$\pi_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{x}) = C\pi_{\mathscr{B}'}(\boldsymbol{x})$ となる．

---

[2] 集合論の教科書を参照．

2.1.4 双対空間

ベクトル空間に対して，これから定義する双対空間は，もとのベクトル空間の影のような存在であるが，ベクトル空間自身は，その双対空間の助けを借りながら論じることにより，より精緻な議論を展開することができる．

問題 37 の特別な場合として，$\mathscr{W}$ が複素数 $\mathbb{C}$ の場合を考える．

定義 2.1.8 ベクトル空間 $\mathscr{V}$ 上の線形汎関数全体の集合は，和 $f+g$ と定数倍 af の演算を

$$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}), \quad (af)(\boldsymbol{x}) = af(\boldsymbol{x})$$

で定義することにより，ベクトル空間になる．これを $\mathscr{V}$ の**双対**（そうつい）**空間**といい，$\mathscr{V}^*$ で表す．

補題 2.1.9 ベクトル空間 $\mathscr{V}$ において，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を基底とする．このとき，$\mathscr{V}$ 上の汎関数 f_i を

$$f_i\Bigl(\sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{b}_j\Bigr) = a_i$$

とすれば，f_i は線形で，$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ は双対空間 $\mathscr{V}^*$ の基底である．

この補題により，ベクトル空間が有限次元のときには，双対空間も同じ次元をもつことがわかる．補題の証明は，つぎの問題にしておく．

問題 40 ベクトル空間 $\mathscr{V}$ において，$\mathscr{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を基底とする．このとき，

(i) 補題 2.1.9 を証明せよ．

(ii) $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}_i$ と表せることを示せ．

(iii) $\pi_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{x}) = {}^t(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{C}^n$ と表せることを示せ．

上の補題 2.1.9 で決まった双対空間 $\mathscr{V}^*$ の基底 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ を $\mathscr{V}$ の基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ の**双対基底**ともいう．

問題 41 ベクトル空間 $\mathscr{V}$ の双対空間 $\mathscr{V}^*$ はベクトル空間であるが，$\mathscr{V}$ は $\mathscr{V}^*$ の双対空間 $(\mathscr{V}^*)^*$ と同一視することができることを説明せよ．

2.1.5　内積空間

さらに，n 次複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ における 2 つの縦ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

の内積

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

の性質も一般化される．

定義 2.1.10　複素ベクトル空間 $\mathscr{V}$ の任意の 2 元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，下の 3 条件を満たす複素数 $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ が定まるとき，写像

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathscr{V} \times \mathscr{V} \longmapsto (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \in \mathbb{C}$$

を $\mathscr{V}$ における**内積**といい，このような内積の与えられているベクトル空間を**内積空間**という．

(i) $(\boldsymbol{x}|a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$.

(ii)（エルミート性）$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}$.

(iii)（正定値性）$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \geq 0$. ただし，等号成立は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．

条件 (i), (ii) を合わせると

$$(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}) = \overline{a}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) + \overline{b}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}).$$

実ベクトル空間に，実数に値をとる内積が与えられている場合には，**実内積空間**という．

例 2.1.3 のベクトル空間 $\mathscr{F}(D)$ において，D が有限集合の場合には，

$$(f|g) = \sum_{i \in D} \overline{f(i)} g(i), \quad f, g \in \mathscr{F}(D)$$

により，$\mathscr{F}(D)$ 上の内積を考えることができる．$D = I$ の場合には，$\mathbb{C}^n$ における内積になっているので，この内積を $\mathscr{F}(D)$ における**自然な内積**という．この考え方は 3.1 節において，ベクトル空間のテンソル積に内積を定義するときに利用される．

定義 2.1.11 ベクトル空間 $\mathscr{V}$ からベクトル空間 $\mathscr{W}$ への写像 X が

$$X(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = \overline{a}X\boldsymbol{x} + \overline{b}X\boldsymbol{y}$$

を満たすとき，写像 X は**共役線形**であるという．

例えば，内積の第 1 変数は共役線形であるが，第 2 変数は線形である．

また，任意の $\boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ に対して，$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = 0$ が成り立てば，内積の条件 (iii) により，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．

とくに，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ のときには，内積の値が非負になるので，その平方根を

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})}$$

で表し，この値をベクトル $\boldsymbol{x}$ のノルムという．ノルムはベクトルの（長さと解釈される）大きさを表している．

補題 2.1.12 内積空間ではシュワルツの不等式

$$|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|$$

が成り立つ．

証明 $\|\boldsymbol{y}\| = 0$ ならば，内積の条件 (iii) により，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ であるから，$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = 0$．したがって，シュワルツの不等式が成り立つ．

$\|\boldsymbol{y}\| \neq 0$ のとき，ベクトル $\|\boldsymbol{y}\|^2\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{z}$ とする．内積の条件 (ii), (iii) により，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{z}) =&(\boldsymbol{z}|\,\|\boldsymbol{y}\|^2\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}) \\ =&\|\boldsymbol{y}\|^2(\|\boldsymbol{y}\|^2\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})(\|\boldsymbol{y}\|^2\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}) \\ =&\|\boldsymbol{y}\|^4(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) - \|\boldsymbol{y}\|^2\overline{(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\|\boldsymbol{y}\|^2(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\overline{(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}) \\
=&\|\boldsymbol{y}\|^4\|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})|^2 \\
=&\|\boldsymbol{y}\|^2(\|\boldsymbol{x}\|^2\,\|\boldsymbol{y}\|^2 - |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})|^2).
\end{aligned}
$$

$\|\boldsymbol{y}\| \neq \boldsymbol{0}$ なので，左辺の内積の正定値条件 (iii) により，シュワルツの不等式が得られる． ■

この補題を使うと，つぎのことがわかる．以後，複素数 $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の実部 x と虚部 y をそれぞれ $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ で表す[3]．

補題 2.1.13　ノルムはつぎの 3 条件を満たしている．

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$．ただし，等号成立は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．

(ii)（斉次性）$\|a\boldsymbol{x}\| = |a|\,\|\boldsymbol{x}\|$．

(iii)（三角不等式）$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$．

証明　条件 (i), (ii) はノルムの定義から直ちにわかる．条件 (iii) だけを示せばよい．シュワルツの不等式により，$\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \leq |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2.
\end{aligned}
$$
■

問題 42　つぎの平行四辺形の式（中線定理）を示せ．

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2).$$

2 つの零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = 0$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するといい，$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ で表す．$\mathscr{V}$ の部分集合 $\mathscr{X}$ に対して定まる集合

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathscr{V} \mid \text{すべての } \boldsymbol{y} \in \mathscr{X} \text{ に対して } (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = 0\}$$

---

[3] 虚部 (Imaginary part) を表す記号 Im は，定義 1.5.5 の線形変換の像 (Image) を表す記号と同じであるが，前後の文脈から間違うことはない．

は，内積の第 2 変数の線形性により，$\mathscr{V}$ の部分ベクトル空間になるので，これを $\mathscr{X}$ の**直交補空間**といい，$\mathscr{X}^{\perp}$ で表す．また，すべての $\boldsymbol{y} \in \mathscr{X}$ に対して，$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = 0$ となることを，$\boldsymbol{x} \perp \mathscr{X}$ と書く．同様に，$\mathscr{V}$ の 2 つの部分集合 $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}'$ の任意の 2 元 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$, $\boldsymbol{y} \in \mathscr{X}'$ に対して，$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = 0$ となることを，$\mathscr{X} \perp \mathscr{X}'$ と書く．

$\mathscr{X}$ が有限次元部分ベクトル空間のときは，$(\mathscr{X}^{\perp})^{\perp} = \mathscr{X}$, $\dim(\mathscr{X}^{\perp}) = \dim(\mathscr{V}) - \dim(\mathscr{X})$ などが成り立つ．

つぎに，ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ における自然基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ の概念を拡張する．

定義 2.1.14 有限次元ベクトル空間 $\mathscr{V}$ の基底 $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ で条件

$$(\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{b}_j) = \delta_{i,j}$$

を満たすものを**規格直交基底**という．

有限次元ベクトル空間に基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ が与えられたとき，

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}_1$$

とし，$k = 2, 3, \ldots, n$ に対しては順次

$$\boldsymbol{b}_k = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}'_k\|}\boldsymbol{x}'_k \quad \left(\boldsymbol{x}'_k = \boldsymbol{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{b}_i\right)$$

とすれば，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ は $\mathscr{V}$ の規格直交基底である．このようにして，基底から規格直交基底を作る方法を**グラム–シュミットの直交化**という．

問題 43 内積空間において，$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を規格直交基底とする．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して，つぎの展開式を示せ．

(i) $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}_i$.

(ii) $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{b}_i)(\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{y})$.

一般に，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を $\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{b}_i$ と規格直交基底の 1 次結合で表すことを**直交展開**または**フーリエ展開**といい，そのときの係数 a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を展開係数または**フーリエ係数**[4]という．

[4] この用語は内積空間が有限次元の場合には，単に展開係数ということが多い．

内積空間 $\mathscr{V}$ 上の線形変換 X と $\mathscr{V}$ の 2 組の規格直交基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ と $\{\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_n\}$ に対して,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{b}_i|X\boldsymbol{b}_i) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{b}'_j)(\boldsymbol{b}'_j|X\boldsymbol{b}_i)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\boldsymbol{b}'_j \,\middle|\, X\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{b}'_j)\boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{b}'_j|X\boldsymbol{b}'_j)\end{aligned}$$

が成り立つので, X に対して定まるこの値は規格直交基底の選び方によらずに決まることがわかる. そこで, X に対してこの値をとる汎関数を**トレイス**といい, Tr で表す. 内積の性質から, トレイスはベクトル空間 $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ 上の線形汎関数である. さらに,

(i) $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$.

(ii) X^* を 2.2.1 項で説明する X の随伴変換とすると,

$$\mathrm{Tr}(X^*) = \overline{\mathrm{Tr}(X)}, \quad \mathrm{Tr}(X^*X) \geq 0.$$

(iii) $\mathscr{V} = \mathbb{C}^n$ の場合には, $X = (x_{i,j})$ に対し,

$$\mathrm{Tr}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{i,i}, \quad \mathrm{Tr}(X^*X) = \sum_{i,j=1}^{n} |x_{i,j}|^2.$$

などの性質をもっている. (i) により, 任意のユニタリ行列 U とその随伴行列 U^* に対して,

$$\mathrm{Tr}(UXU^*) = \mathrm{Tr}(X)$$

が成り立つ. (iii) により, $\mathrm{Tr}(X^*X) = 0$ ならば, $X = 0$ である. トレイスが定義されているベクトル空間 $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ を明記する必要性が生じたときには, 線形変換が定義されているベクトル空間 $\mathscr{V}$ を添え字として付け, $\mathrm{Tr}_{\mathscr{V}}$ のように表す.

定理 2.1.15　n 次元ベクトル空間 $\mathscr{V}$ には, 与えられた基底 $\mathscr{B}$ を規格直交基底とするような内積 $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})_{\mathscr{B}}$ が存在する.

証明　集合 $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ をベクトル空間 $\mathscr{V}$ における基底とする.

2.1.3 項の最後の註 5 の (2.1) 式で述べた，ベクトル空間 $\mathscr{V}$ から $\mathbb{C}^n$ への全単射な線形変換 $\pi_{\mathscr{B}}$ を用いて，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ に対して，

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})_{\mathscr{B}} = (\pi_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{x})|\pi_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{y}))$$

とする．$\mathbb{C}^n$ における内積の性質を使うと，左辺の第 1 変数は共役線形，第 2 変数は線形である．さらに，左辺はエルミート性と正定値性も満たす．また，正定値性 $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})_{\mathscr{B}} \geq 0$ の等号成立は，$\pi_{\mathscr{B}}$ の単射性により，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときに限られる．したがって，この $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})_{\mathscr{B}}$ は $\mathscr{V}$ における内積である．基底がこの内積に関して規格直交性を満たしていることは，$\pi_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{b}_j) = \boldsymbol{e}_j$ となることから自明である． ■

最後に，$\mathbb{C}^n$ 以外の内積空間の例を挙げておく．

例 2.1.16 $n \times m$ 行列全体の集合 $M_{n,m}(\mathbb{C})$ は通常の行列の和と定数倍の演算で nm 次元の複素ベクトル空間になり，行列単位の集合 $\{E_{i,j} \mid i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m\}$ はその基底になっている．ここで，このベクトル空間の任意の 2 元 X，Y に対して

$$(X|Y) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^m}(X^*Y)$$

とすれば，これは $M_{n,m}(\mathbb{C})$ における内積になる．ただし，X^* は X の共役転置である．いま $X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m) = (x_{i,j})$, $Y = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m) = (y_{i,j})$ とすれば，$X^*Y = ((\boldsymbol{x}_j|\boldsymbol{y}_i)) \in M_m(\mathbb{C})$ となるので，

$$(X|Y) = \sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{x}_j|\boldsymbol{y}_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\overline{x_{i,j}}y_{i,j}.$$

したがって，上の基底はこの内積に関して規格直交基底になっている．さらに，この内積の値は $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^n}(YX^*)$ とも一致している．

ここで，$M_{n,m}(\mathbb{C})$ における定数倍の演算を実数に制限すると，集合

$$\{E_{k,\ell} \mid k = 1, \ldots, n; \ell = 1, \ldots, m\} \cup \{iE_{k,\ell} \mid k = 1, \ldots, n; \ell = 1, \ldots, m\}$$

がその基底になるので，$2nm$ 次元の実ベクトル空間になることがわかる．この場合には，

$$(X|Y)_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\,(X|Y)$$

が内積になり，上の基底は規格直交基底になっている．したがって，$X=(x_{k,\ell})$, $Y=(y_{k,\ell})$ の各成分を

$$x_{k,\ell}=a_{k,\ell}+ib_{k,\ell},\ y_{k,\ell}=c_{k,\ell}+id_{k,\ell}\quad (a_{k,\ell},b_{k,\ell},c_{k,\ell},d_{k,\ell}\in\mathbb{R})$$

とすれば，

$$(X|Y)_{\mathbb{R}}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m}(a_{k,\ell}c_{k,\ell}+b_{k,\ell}d_{k,\ell})$$

となる．

2.1.6　横ベクトルのベクトル空間

これまでの縦ベクトルのベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ に対して，横ベクトルのベクトル空間を $(\mathbb{C}^n)^*$ で表す．1.5.3 項の (iii) で説明した，随伴（共役転置）の演算を用いることにより，共役線形な写像

$$\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\longmapsto\boldsymbol{x}^*\in(\mathbb{C}^n)^*$$

が得られる．そこで横ベクトルの空間での内積を，各 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$ に対して，

$$(\boldsymbol{y}^*|\boldsymbol{x}^*)=(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$$

で定義する．これにより，横ベクトルの空間も内積空間になる．また，横ベクトルのベクトル空間 $(\mathbb{C}^n)^*$ はつぎのようなペアリングで $\mathbb{C}^n$ の双対空間の役割をしている．

$$(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{x})\in(\mathbb{C}^n)^*\times\mathbb{C}^n\longmapsto\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\in\mathbb{C}$$

そこで，$(\mathbb{C}^n)^*$ を $\mathbb{C}^n$ の共役空間ということもある．

つぎに，内積空間の場合に，その双対空間の元と内積空間の元とを結ぶリースの定理を示す．

定理 2.1.17（**F. リース**）有限次元の内積空間 $\mathscr{V}$ 上の線形汎関数 f に対して，

$$f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$$

を満たす $\boldsymbol{y}\in\mathscr{V}$ が一意的に存在する．

証明　$\mathscr{V}$ における規格直交基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を用いて，$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(\boldsymbol{b}_i)}\boldsymbol{b}_i$ とする．任意の $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ は $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}_i$ と表せるから，

$$(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{b}_i)(\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{x}) = f\Big(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}_i\Big) = f(\boldsymbol{x}).$$

また，$(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}'|\boldsymbol{x})$ がすべての $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ に対して成り立てば，$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'|\boldsymbol{x}) = 0$ がすべての $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ に対して成り立つので，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'$ を代入すると，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$ となり，$\boldsymbol{y}$ の一意性もわかる．■

内積空間 $\mathscr{V}$ の基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ により定まる正則行列 $T = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ に対して，$\widetilde{T} = (T^{-1})^*$ とする．このとき，$\boldsymbol{b}_i = T\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ であるから，リースの定理により，最初の基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ の双対基底に対応するベクトルの集合が，$\{\widetilde{T}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \widetilde{T}\boldsymbol{e}_n\}$ により与えられる．

内積空間 $\mathscr{V}$ 上で，各 $\boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ に対して，双対空間の元 $\boldsymbol{y}^*$ を $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$ で定めれば，

$$\begin{aligned}(a\boldsymbol{y}_1 + b\boldsymbol{y}_2)^*(\boldsymbol{x}) &= (a\boldsymbol{y}_1 + b\boldsymbol{y}_2|\boldsymbol{x}) = \overline{a}(\boldsymbol{y}_1|\boldsymbol{x}) + \overline{b}(\boldsymbol{y}_2|\boldsymbol{x}) \\ &= \overline{a}\boldsymbol{y}_1^*(\boldsymbol{x}) + \overline{b}\boldsymbol{y}_2^*(\boldsymbol{x}) = (\overline{a}\boldsymbol{y}_1^* + \overline{b}\boldsymbol{y}_2^*)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となるので，写像 $\boldsymbol{y} \in \mathscr{V} \mapsto \boldsymbol{y}^* \in \mathscr{V}^*$ を J_1 とすれば，J_1 は共役線形である．また，$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{0}$ ならば，$\|\boldsymbol{y}\|^2 = \boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{y}) = 0$ であるから，この写像は単射であるし，上のリースの定理は，内積空間が有限次元の場合には，全射であることを示している．さらに，写像

$$(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathscr{V}^* \times \mathscr{V}^* \longmapsto (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}$$

は双対空間 $\mathscr{V}^*$ 上の内積であることもわかる．そこで，この値を $(\boldsymbol{x}^*|\boldsymbol{y}^*)$ と書くことにすれば，J_1 は全射等長である．したがって，$\mathscr{V}$ の規格直交基底を $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ とすれば，$\{\boldsymbol{b}_1^*, \ldots, \boldsymbol{b}_n^*\}$ は双対空間 $\mathscr{V}^*$ の規格直交基底である．今後，内積空間の双対空間を内積空間と見なすときには，断らない限り，この内積を用いる．

問題 44　ベクトル空間 $M_{n,m}(\mathbb{C})$ 上の線形汎関数 f に対して，

$$f(X) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^m}(YX) \quad (X \in M_{n,m}(\mathbb{C}))$$

を満たす $Y \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ が存在することを示せ．

2.1.7 直和

1.5.2 項において説明した，実ベクトル空間の部分ベクトル空間の直和の定義を，複素ベクトル空間の場合にもそのまま使うことにする．つまり，ある複素ベクトル空間の 2 つの部分ベクトル空間 $\mathscr{V}$ と $\mathscr{W}$ の共通部分が $\{\mathbf{0}\}$ のときには，$\mathscr{V}+\mathscr{W}$ を $\mathscr{V}$ と $\mathscr{W}$ の**直和**という．さらに，$\mathscr{V}\perp\mathscr{W}$ を満たすときには，**直交直和**といい，$\mathscr{V}\oplus\mathscr{W}$ で表す．部分ベクトル空間が 3 つ以上のときにも同じように直和や直交直和を考えることができる．これらの直和は最初のベクトル空間の部分ベクトル空間になっている．

他方，複数のベクトル空間から新たなベクトル空間を作る方法の 1 つとして，上述の部分ベクトル空間の直和とは少し違う直和が知られている．この直和により得られるベクトル空間では，直和を作る前のベクトル空間はその部分ベクトル空間と同一視することができ，上の意味でのその直和は，ここでの直和により作られたベクトル空間になっている．このように，用語としては，紛らわしいが，前後の文脈から間違うことはない．

この他にも，複数のベクトル空間から新たなベクトル空間を作る方法の 1 つとして，テンソル積が知られているが，その説明は，3.1 節に行ってからにする．

定義 2.1.18　n 個のベクトル空間 $\mathscr{V}_1,\ldots,\mathscr{V}_n$ の直積集合 $\mathscr{V}_1\times\cdots\times\mathscr{V}_n$ の任意の元 $(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ と $(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n)$ に対して，和と定数倍を

$$(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)+(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{y}_n),$$
$$a(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)=(a\boldsymbol{x}_1,\ldots,a\boldsymbol{x}_n)$$

で定義すると，集合 $\mathscr{V}_1\times\cdots\times\mathscr{V}_n$ はベクトル空間になる．これを $\mathscr{V}_1,\ldots,\mathscr{V}_n$ の**直和**といい，$\mathscr{V}_1\oplus\cdots\oplus\mathscr{V}_n$ で表す．そのとき，ベクトル $(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ を $\boldsymbol{x}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{x}_n$ と表すことが多い．

ベクトル空間 $\mathscr{V}_1,\ldots,\mathscr{V}_n$ が内積空間の場合には，その直和 $\mathscr{V}_1\oplus\cdots\oplus\mathscr{V}_n$ に自然な内積

$$(\boldsymbol{x}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{y}_n)=\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{x}_j|\boldsymbol{y}_j)$$

が存在し，直和は内積空間になる．

例 2.1.19 2 つの縦ベクトルの空間 $\mathbb{C}^2$ と $\mathbb{C}^3$ の直和 $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^3$ は，全単射な線形変換

$$({}^t(x_1, x_2), {}^t(y_1, y_2, y_3)) \in \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^3 \mapsto {}^t(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^5$$

を通じて，縦ベクトルの空間 $\mathbb{C}^5$ と見なすことができる．

また，ベクトル空間 $M_2(\mathbb{C})$ と $M_3(\mathbb{C})$ の直和 $M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C})$ は，全単射な線形変換

$$(X, Y) \in M_2(\mathbb{C}) \oplus M_3(\mathbb{C}) \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^5$$

を通じて，$M_5(\mathbb{C})$ の部分ベクトル空間と見なすことができる．

2.2 線形変換の名前と諸性質

この節では，内積空間から自分自身，あるいは他の内積空間への線形変換の用語や基本的な性質などを説明する．

2.2.1 線形変換の名前

2.1 節で示したように，n 次元ベクトル空間 $\mathscr{V}$ に基底 $\mathscr{B}$ を 1 つ定めると，(2.1) の線形写像写像 $\pi_{\mathscr{B}} : \mathscr{V} \to \mathbb{C}^n$ により，これら 2 つのベクトル空間を同一視して扱うことができる．したがって，$\mathscr{V}$ に $\mathbb{C}^n$ の内積が引き戻され，$\mathscr{V}$ は内積空間になり，$\mathscr{V}$ 上の線形変換 X には $\mathbb{C}^n$ 上の行列 $\pi_{\mathscr{B}} \circ X \circ \pi_{\mathscr{B}}^{-1}$ が対応する．そこで，線形変換の多くに対応する行列と同じ名称が与えられている．ここでは，このように行列に対して使われる用語と線形変換に対して使われる用語の対応をまとめておく．その準備として，内積空間 $\mathscr{V}$ から他の内積空間への線形変換に対して，内積を用いて導入される「随伴」という演算の説明から始める．

随伴変換

X を有限次元複素内積空間 $\mathscr{V}$ から有限次元複素内積空間 $\mathscr{W}$ への線形変換とする．各ベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathscr{W}$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}|X\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathscr{V})$$

とおいて定まる写像 f は，変換 X と内積の線形性により，$\mathscr{V}$ 上の線形汎関数である．したがって，リースの定理 2.1.17 により，$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}'|\boldsymbol{x})$ を満たすベクトル $\boldsymbol{y}' \in \mathscr{V}$ が一意的に存在する．このとき，得られる変換 $\boldsymbol{y} \in \mathscr{W} \mapsto \boldsymbol{y}' \in \mathscr{V}$ も自動的に線形である．これを X の**随伴変換**といい，X^* で表す．つまり，関係式

$$(\boldsymbol{y}|X\boldsymbol{x}) = (X^*\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{y} \in \mathscr{W}, \boldsymbol{x} \in \mathscr{V})$$

により随伴という演算 $X \mapsto X^*$ が決まる．この随伴はつぎのような条件を満たす．

$$(X+Y)^* = X^* + Y^*, \quad (aX)^* = \overline{a}X^*, \quad (X^*)^* = X.$$

さらに Y が有限次元複素内積空間 $\mathscr{W}$ から有限次元複素内積空間 $\mathscr{X}$ への線形変換の場合には

$$(YX)^* = X^*Y^*$$

も満たす．ここでの積 YX は $\mathscr{V}$ から $\mathscr{X}$ への合成写像 $Y \circ X$ として得られる線形変換であるが，線形変換の場合には合成写像の記号 $\circ$ を省くことが多い．X^*Y^* も同様である．

(2.1) の写像 $\pi_{\mathscr{B}}$ を用いると，線形変換から正方行列への対応

$$X \longmapsto \pi_{\mathscr{B}} \circ X \circ \pi_{\mathscr{B}}^{-1} \tag{2.2}$$

が得られる．行列 $\pi_{\mathscr{B}} \circ X \circ \pi_{\mathscr{B}}^{-1}$ の (i,j) 成分 $x_{i,j}$ は

$$(\boldsymbol{e}_i|(\pi_{\mathscr{B}} \circ X \circ \pi_{\mathscr{B}}^{-1})\boldsymbol{e}_j) = (\pi_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{b}_i)|\pi_{\mathscr{B}}(X\boldsymbol{b}_j)) = (\boldsymbol{b}_i|X\boldsymbol{b}_j)_{\mathscr{B}} \tag{2.3}$$

により与えられていたので，X^* に対応する正方行列の (i,j) 成分は

$$(\boldsymbol{b}_i|X^*\boldsymbol{b}_j)_{\mathscr{B}} = \overline{(\boldsymbol{b}_j|X\boldsymbol{b}_i)_{\mathscr{B}}} = \overline{x_{j,i}}$$

となり，X の随伴には X に対応する行列の共役転置が対応している．つまり，

$$\pi_{\mathscr{B}} \circ X^* \circ \pi_{\mathscr{B}}^{-1} = (\pi_{\mathscr{B}} \circ X \circ \pi_{\mathscr{B}}^{-1})^*$$

が成り立っている.

正方行列に対応する場合

有限次元複素内積空間から自分自身への線形変換 X にさまざまな名称が与えられている. つぎの表は, 線形変換 X が右側の条件を満たすときには, 左側の名で呼ばれることを意味している.

X の名称	条件
正規	$X^*X = XX^*$
自己随伴	$X^* = X$
ユニタリ	$X^*X = XX^* = 1$
冪（べき）等	$X^2 = X$
射影	$X^2 = X = X^*$
正	$\forall\, \boldsymbol{x} : (X\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{x}) \geq 0$
可逆	$\exists A\, \exists B : AX = XB = 1$

線形変換 X が正であることを $X \geq 0$ とも表す. ただし, $\forall\, \boldsymbol{x}$ は「任意の $\boldsymbol{x}$ に対して」という意味であり, $\exists A\, \exists B$ は「A, B が存在する」という意味である.

この表を見ると, 最後の可逆を除くと, (2.2) の行列表示により対応する変換と行列の名称が一致していることがわかる. ただし, 自己随伴行列はエルミート行列と呼ばれることの方が多いが, ここでは行列とそれに対応する線形変換の用語を揃えて, 自己随伴という呼び方を用いる. 可逆な線形変換に対応する行列の名称は正則行列である.

内積空間において, A が冪等ならば, $1 - A$ も冪等である. このとき, それらの像のなす 2 つの部分ベクトル空間 $A\mathscr{V}$ と $(1 - A)\mathscr{V}$ の和は $\mathscr{V}$ となり, 直和になっている. A が射影の場合は, これが直交直和になっている. ここで, 冪等変換と射影との違いを, 簡単な例で見ておこう.

例 2.2.1 2 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

はともに冪等変換である．冪等変換 P がさらに $P^* = P$ を満たすと射影になるので，この追加条件により，射影は線形変換として，その像への正射影になる．一般に，射影の像の次元を射影の**次元**と定める．例えば，2 次の正方行列

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1_2 - P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

はともに射影である．この例では，$A\mathbb{C}^2 = P\mathbb{C}^2$ となり，A と P は同じ像 $\mathbb{C}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$ をもっていて，射影 P の次元は 1 である．

実内積空間の場合には，複素共役がないので，随伴は**転置**と呼ばれ，${}^tX$ で表される．この場合には，

X の名称	条件
対称	${}^tX = X$
直交	${}^tX\,X = X\,{}^tX = 1$

対称変換には，(2.2) により，対称行列が対応し，直交変換には直交行列が対応している．

矩形行列に対応する場合

有限次元複素内積空間 $\mathscr{V}$ から有限次元複素内積空間 $\mathscr{W}$ への線形変換 X にもさまざまな名称が与えられている．

X の名称	条件
半等長	$X^*XX^* = X^*$
等長	$X^*X = 1_{\mathscr{V}}$
余等長	$XX^* = 1_{\mathscr{W}}$

$\mathscr{V}$ から $\mathscr{W}$ への線形変換 X が等長であることと，X がすべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ に対して

$$(X\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$$

を満たすことは同値である．したがって，$\|X\boldsymbol{x} - X\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ とも同値であり，等長変換 X は 2 点間の距離を変えないことがわかる．

一般に，半等長変換 $V : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ は

$$(V^*V)^2 = (V^*VV^*)V = V^*V, \quad (VV^*)^2 = V(V^*VV^*) = VV^*$$

を満たすので，自己随伴な変換 V^*V と VV^* はともに射影である．このとき，V は部分ベクトル空間 $V^*V\mathscr{V}$ から部分ベクトル空間 $VV^*\mathscr{W}$ への全射等長変換で，$V^*V\mathscr{V}$ の直交補空間上では $\mathscr{W}$ の零ベクトルを値にとっている．そこで，V^*V を V の**始射影**，VV^* を V の**終射影**といい，対応する部分ベクトル空間をそれぞれ**始空間**，**終空間**という．このように，線形変換が半等長であるというのは，始空間へ制限すると等長になるということである．したがって，ユニタリならば等長であるし，等長なら半等長である．

問題 45　線形変換 X に対して，つぎのことを示せ．
(i) X が自己随伴であることと，すべての $\boldsymbol{x}$ に対して $(\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{x}) = (X\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})$ が成り立つこととは同値である．
(ii) X が等長であることと，すべての $\boldsymbol{x}$ に対して $(X\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})$ が成り立つこととは同値である．

問題 46　有限次元内積空間から自分自身への線形変換に対しては，等長であることと，余等長であることと，ユニタリであることは互いに同値であることを示せ．

共役線形変換

定義 2.1.11 において述べた，複素ベクトル空間 $\mathscr{V}$ から複素ベクトル空間 $\mathscr{W}$ への共役線形写像は**共役線形変換**と呼ばれることも多いが，これまでの線形変換と違い，基底を用いた複素行列表示は存在しない．

全射な共役線形変換 $X : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ が，任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ に対して，

$$(X\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$$

を満たすとき，変換 X を**反ユニタリ**という．

例 2.2.2　ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ において，共役線形変換

$$J_0 : \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{e}_j \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} \boldsymbol{e}_j$$

は典型的な反ユニタリ変換の例である．これは，$J_0^2 = 1$ を満たし，n 次正方行列 A の随伴は $J_0\,{}^tA\,J_0$ と表せる．2.1.6 項で説明した J_1 は有限次元内積

空間からその双対空間への反ユニタリであるが，定義域と値域の空間が違うので，J_1 の2乗を考えることはできない．一般の反ユニタリは，あるユニタリ U を用いて，J_0U と表せ，2乗しても恒等変換になるとは限らない．

後の3.2.3項で定義されるホッジ作用素 J は，この J_0 とは別の反ユニタリ変換である．

転置

2.1.6項で説明した n 次元複素内積空間 $\mathscr{V}$ の双対空間 $\mathscr{V}^*$ の議論とそこでの記号を，ここでも踏襲することにする．

n 次元複素内積空間 $\mathscr{V}$ から新たな m 次元複素内積空間 $\mathscr{W}$ 上の線形変換 X に対して，双対空間 $\mathscr{W}^*$ から双対空間 $\mathscr{V}^*$ への線形変換

$$\boldsymbol{x}^* \in \mathscr{W}^* \longmapsto \boldsymbol{x}^* \circ X \in \mathscr{V}^*$$

を X の**転置**といい，${}^tX$ で表す．$\mathscr{V}$ と $\mathscr{W}$ の規格直交基底をそれぞれ，$\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, $\{\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_m\}$ とすれば，${}^tX$ の (i,j) 成分は

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}_i^* | {}^tX(\boldsymbol{b}'_j)^*) &= (\boldsymbol{b}_i^* | (\boldsymbol{b}'_j)^* \circ X) = ((\boldsymbol{b}'_j)^* \circ X)(\boldsymbol{b}_i) \\ &= ((\boldsymbol{b}'_j)^*)(X\boldsymbol{b}_i) = (\boldsymbol{b}'_j | X\boldsymbol{b}_i)\end{aligned}$$

により，X の (j,i) 成分に一致する．したがって，ここでの転置は，行列の転置の一般化になっている．

2.2.2　スペクトル

前章末の1.5.4項で述べたように．線形変換の幾何学的特徴を捉える量の集合として，スペクトルという概念がある．線形変換が有限次元内積空間に作用しているときには，スペクトルの元の個数は，ベクトル空間の次元を越えることはない．

定義 2.2.3　有限次元複素内積空間からそれ自身への線形変換 X に対して，集合

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid X - \lambda 1 \text{ は逆変換をもたない}\}$$

を X の**スペクトル**といい，$\mathrm{Sp}(X)$ で表す．

線形変換の可逆性（逆変換をもつこと）は行列の正則性に相当している．零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ が $X\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たすことと，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(X - \lambda 1)$ とは必要十分である．したがって，X のスペクトルは，(2.2) の行列 $\pi_{\mathscr{B}} \circ X \circ \pi_{\mathscr{B}}^{-1}$ の固有値全体の集合と一致している．

正規な線形変換は行列の対角化に相当するスペクトル分解が可能な写像で，自己随伴，ユニタリ，射影などはその特別な場合になっている．自己随伴変換はエルミート行列に相当する線形変換であるから，定理 1.5.10 により，スペクトルは実数の集合 $\mathbb{R}$ に含まれる．ユニタリはユニタリ行列に相当する線形変換であるから，問題 35 により，スペクトルは複素平面の単位円周上に載っている．射影は射影行列に相当する線形作用素で，スペクトルは 0 と 1 の値しかとらない．正線形変換は正定値行列に相当する線形変換であるから，定理 1.5.11 により，スペクトルの元はどれも非負の値をとる．

2.2.3 核と余核と極分解

線形変換がベクトル空間に作用するときに，問題 38 で与えた部分ベクトル空間がどんなものかを記述する用語を導入する．

ベクトル空間 $\mathscr{V}$ からベクトル空間 $\mathscr{W}$ への線形変換 X に対して，$\mathscr{V}$ の部分ベクトル空間

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathscr{V} \mid X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

を，X の**核**といい，$\mathrm{Ker}(X)$ で表す．X が単射であることと，核が零ベクトルだけからなることとは同値である．このとき，X は**非退化**であるという．また，$\mathscr{W}$ の部分ベクトル空間

$$X\mathscr{V} = \{X\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathscr{V}\}$$

を X の**像**といい，$\mathrm{Im}(X)$ で表し，その次元を X の**階数**という．階数は $\mathrm{rank}(X)$ と表される．また，X^* の核を X の**余核**という．

補題 2.2.4 有限次元複素内積空間 $\mathscr{V}$ から有限次元複素内積空間 $\mathscr{W}$ への線

形変換 X に対して,

$$\mathrm{Ker}(X^*) = \mathrm{Im}(X)^\perp$$

が成り立つ.

証明　任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathscr{W}$ に対して,

$$(\boldsymbol{y}|X\boldsymbol{x}) = (X^*\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$$

である. $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(X^*)$ ならば, すべての $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ に対して, $(\boldsymbol{y}|X\boldsymbol{x}) = 0$ となるので, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(X)^\perp$. 逆に, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(X)^\perp$ ならば, すべての $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ に対して, $(X^*\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = 0$ となるので, $X^*\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. よって, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(X^*)$. ■

部分ベクトル空間と射影

部分ベクトル空間と射影との密接な関係を述べる.

補題 2.2.5　$\mathscr{V}$ を有限次元複素内積空間とする.

(i) $\mathscr{V}$ において, 射影変換全体のなす集合を $\mathrm{Proj}(\mathscr{V})$ とし, 部分ベクトル空間全体のなす集合を $\mathscr{S}$ とする. このときの写像

$$P \in \mathrm{Proj}(\mathscr{V}) \longmapsto P\mathscr{V} \in \mathscr{S}$$

は全単射である. さらに, $(1-P)\mathscr{V} = (P\mathscr{V})^\perp$ が成り立つ.

(ii) $\mathscr{W}$ を $\mathscr{V}$ の部分ベクトル空間とする. $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ に対して, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \perp \mathscr{W}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathscr{W}$ が一意的に存在する. つまり

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{y} \in \mathscr{W},\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathscr{W}^\perp).$$

(iii) (ii) の $\mathscr{W}$ に対して, $\boldsymbol{y}' \in \mathscr{W}$ ならば, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}'\|$.

証明　(i) まず全射であることから示す. $\mathscr{V}$ の部分ベクトル空間 $\mathscr{W}$ が $\{\boldsymbol{0}\}$ の場合には, $P = 0$ とすれば, $P\mathscr{V} = \mathscr{W}$. 部分ベクトル空間 $\mathscr{W}$ が $\{\boldsymbol{0}\}$ でない場合には, その規格直交基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ は $\mathscr{V}$ の規格直交系である. ここで, 線形変換 P を, 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ に対して,

$$P\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}_j$$

により定義すれば，$P\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ となるので，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ に対して，

$$P^2\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k}(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x})P\boldsymbol{b}_j = \sum_{j=1}^{k}(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}_j = P\boldsymbol{x},$$

$$(\boldsymbol{x}|P\boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{x} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{k}(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{y})\boldsymbol{b}_j\right) = \sum_{j=1}^{k}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{b}_j)(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{y})$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{k}(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}_j \;\middle|\; \boldsymbol{y}\right) = (P\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}).$$

ゆえに，

$$P^2 = P, \quad (\boldsymbol{x}|P\boldsymbol{y}) = (P\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}), \quad P\mathscr{V} = \mathscr{W}$$

が成り立つ．したがって，P は射影であり，写像 $P \mapsto P\mathscr{V}$ は全射である．

つぎに，単射であることを示す．射影 $P' \in \mathrm{Proj}(\mathscr{V})$ が $P'\mathscr{V} = \mathscr{W}$ を満たせば，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ に対して，$P'\boldsymbol{x} \in \mathscr{W}$ であるから，$PP'\boldsymbol{x} = P'\boldsymbol{x}$ が成り立ち，$PP' = P'$．上の議論で，P と P' を入れ替えると，$P'P = P$．他方，射影は自己随伴であるから，$PP' = P' = (P')^* = (PP')^* = (P')^*P^* = P'P$．ゆえに，$P' = PP' = P'P = P$．よって，写像 $P \mapsto P\mathscr{V}$ は単射でもある．

さらに，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ ならば，$((1-P)\boldsymbol{x}|P\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|(1-P)P\boldsymbol{y}) = 0$ となるので，$(1-P)\mathscr{V} \subset (P\mathscr{V})^{\perp}$．また，$\boldsymbol{z} \in (P\mathscr{V})^{\perp}$ ならば，任意の $\boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ に対して，$(\boldsymbol{z} - (1-P)\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{z}|P\boldsymbol{y}) = 0$．ゆえに，$\boldsymbol{z} \in (1-P)\mathscr{V}$．

(ii) (i) より，$\mathscr{W} = P\mathscr{V}$ を満たす射影 P が存在する．ここで，$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}$ とすれば，$\boldsymbol{y} \in \mathscr{W}$ かつ $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = (1-P)\boldsymbol{x}$．(i) により，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathscr{W}^{\perp}$．もし $\boldsymbol{y}' \in \mathscr{W}$ かつ $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}' \in \mathscr{W}^{\perp}$ ならば，

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}' = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}') - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \in \mathscr{W} \cap \mathscr{W}^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$$

となるから，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'$ となり，$\boldsymbol{y}$ の一意性が示された．

(iii) (ii) より，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathscr{W}^{\perp}$．任意の $\boldsymbol{y}' \in \mathscr{W}$ に対して，$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}' \in \mathscr{W}$ であるから，ピタゴラスの定理により，

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}'\| = \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}')\|$$

$$= \sqrt{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|^2} \geq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|. \qquad \blacksquare$$

内積空間では，ここでの対応を通じて，部分ベクトル空間に関する議論を射影変換に関する議論に読み替えることができる．そこで，$\mathscr{W} = P\mathscr{V}$ を満たす射影変換 P を $\mathscr{W}$ への射影という．また，$k = \dim(P\mathscr{V})$ のときには，射影変換 P の次元は k であるという．

極分解

線形代数において極分解は非常に基本的で有用な概念であるにもかかわらず，入門書で解説されることは少ない．その理由の1つは，下の例 2.2.8 からも推測されるように，簡単な行列でも，具体例を実際に計算をしてみると，極分解が示す内容の明確さと比べ，導かれる行列の成分が煩雑になるからではないかと思われる．本書の後半では，線形変換に対する極分解を頻繁に用いるので，ここでその説明をしておく．そのためは，系 1.5.12 において示した正定値行列の平方根の考え方を，つぎのように，正線形変換の場合にも示しておくことが必要になる．

補題 2.2.6　有限次元内積空間 $\mathscr{V}$ において，X が正線形変換ならば，$X = Y^2$ を満たす正線形変換 Y が一意的に存在する．

証明　(2.2) で与えた X の行列表示 $\pi_{\mathscr{B}} \circ X \circ \pi_{\mathscr{B}}^{-1}$ を用いると，X が正線形変換であれば，$\pi_{\mathscr{B}} \circ X \circ \pi_{\mathscr{B}}^{-1}$ は正定値行列である．したがって，系 1.5.12 により，$\pi_{\mathscr{B}} \circ X \circ \pi_{\mathscr{B}}^{-1} = A^2$ を満たす正定値行列 A が一意的に存在する．そこで，$Y = \pi_{\mathscr{B}}^{-1} \circ A \circ \pi_{\mathscr{B}}$ とすれば，Y は正線形変換で

$$\begin{aligned} Y^2 &= (\pi_{\mathscr{B}}^{-1} \circ A \circ \pi_{\mathscr{B}})^2 = \pi_{\mathscr{B}}^{-1} \circ A^2 \circ \pi_{\mathscr{B}} \\ &= \pi_{\mathscr{B}}^{-1} \circ (\pi_{\mathscr{B}} \circ X \circ \pi_{\mathscr{B}}^{-1}) \circ \pi_{\mathscr{B}} = X \end{aligned}$$

を満たしている．このとき，A の一意性から，Y の一意性が導かれる．■

この補題で得られた正線形変換 Y を，正線形変換 X の**平方根**といい，$X^{1/2}$ で表す．

有限次元複素内積空間 $\mathscr{V}$ から有限次元複素内積空間 $\mathscr{W}$ への線形変換 X に対して，X^*X は $\mathscr{V}$ 上の正線形変換である．したがって，補題 2.2.6 により，X^*X には平方根 $(X^*X)^{1/2}$ が存在する．これを X の**絶対値**といい，$|X|$ で

表す.

極分解の説明に先立ち，簡単な例を取り上げてみる．実直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の間には，

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

なる関係がある．このときの，2 次ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x, y)$ を 2×1 行列と見なすと，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

と書き直せる．このとき，長さ 1 のベクトル ${}^t(\cos\theta, \sin\theta)$ と非負数 r はそれぞれ行列 $\boldsymbol{x}$ の回転と大きさを与えている．一般の線形変換の極分解は，この分解の考え方を，一般の行列にまで拡張したもので，つぎの定理の V と $|X|$ がそれぞれに対応している.

定理 2.2.7（極分解） 有限次元複素内積空間 $\mathscr{V}$ から有限次元複素内積空間 $\mathscr{W}$ への線形変換 X に対して，$|X|\mathscr{V}$ を始空間，$X\mathscr{V}$ を終空間にもつ半等長変換 $V \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ で，

$$X = V|X| \tag{2.4}$$

を満たすものが一意的に存在する.

証明 X が $\mathscr{V}$ から $\mathscr{W}$ への線形変換ならば，$\mathscr{V}$ の任意の元 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して

$$(X\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|X^*X\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} \mid |X|^2\boldsymbol{y}) = (|X|\boldsymbol{x} \mid |X|\boldsymbol{y})$$

が成り立つので，$\mathscr{V}$ の部分ベクトル空間 $|X|\mathscr{V}$ から $\mathscr{W}$ の部分ベクトル空間 $X\mathscr{V}$ への全射等長変換 $V : |X|\boldsymbol{x} \mapsto X\boldsymbol{x}$ が存在する．写像 V を $|X|\mathscr{V}$ の直交補空間上では $\mathbf{0} \in \mathscr{W}$ に値をとるものとして定義域を拡張すると，$\mathscr{V}$ から $\mathscr{W}$ への半等長変換が得られる．これも同じ記号 V を使って表すことにすると，(2.4) 式が得られる.

つぎに，V の一意性を示す．半等長変換 $V' \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ の始空間が $|X|\mathscr{V}$ で，終空間が $X\mathscr{V}$ で，しかも $X = V'|X|$ を満たすとする．このとき，$V'|X| =$

$V|X|$ であるから，始空間 $|X|\mathscr{V}$ 上では $V' = V$ となる．また，$\boldsymbol{x} \in (|X|\mathscr{V})^\perp$ ならば，

$$\|V'\boldsymbol{x}\|^2 = (V'\boldsymbol{x}|V'\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|(V')^*V'\boldsymbol{x}) = 0$$

となるので，$V'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$．$V$ も $|X|\mathscr{V}$ の直交補空間上では $\mathbf{0}$ に値をとるので，$V' = V$． ■

極分解を扱う際によく利用される式をつぎの問題にしておく．

問題 47　$X \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ の極分解を $V|X|$ とすると，$X^* \in \mathscr{L}(\mathscr{W}, \mathscr{V})$ の極分解は $V^*|X^*|$ と表され，$|X^*| = V|X|V^*$ を満たすことを示せ．

したがって，$X \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ の核と余核（X^* の核）は，極分解 $V|X|$ を使うと，

$$\mathrm{Ker}(X) = (V^*V\mathscr{V})^\perp, \quad \mathrm{Ker}(X^*) = (VV^*\mathscr{W})^\perp$$

と表せる．

例 2.2.8　行列

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，

$$X^*X = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

となるので，例 1.5.13 の計算により，例 2.2.1 の射影 P を用いると，

$$|X| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5+\sqrt{3} & 5-\sqrt{3} \\ 5-\sqrt{3} & 5+\sqrt{3} \end{pmatrix} = 5\,P + \sqrt{3}(1-P)$$

と直交する射影により（スペクトル）分解されるので，$\det_2(|X|) = 5\sqrt{3}$ となる．したがって，

$$V = X|X|^{-1} = \frac{1}{10\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5+\sqrt{3} & -5+\sqrt{3} \\ -5+\sqrt{3} & 5+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 9-5\sqrt{3} & 9+5\sqrt{3} \\ 15-5\sqrt{3} & 15+5\sqrt{3} \\ 12+10\sqrt{3} & 12-10\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

これで，X を $V|X|$ と極分解したときの $|X|$ と V の行列表示が得られた．

2.2.4 多重線形汎関数と多重線形変換

2.3 節で Cullis 行列式を再定義する際や，3.1 節でテンソル積の説明をする際に，定義 2.1.4 で与えた線形汎関数や線形変換の概念を，多変数の場合へ拡張しておく必要がある．そこで，その記述に必要となる用語の準備をする．

定義 2.2.9 $k+1$ 個のベクトル空間 $\mathscr{V}_1,\ldots,\mathscr{V}_k$ と $\mathscr{W}$ に対して，直積集合 $\mathscr{V}_1\times\cdots\times\mathscr{V}_k$ から $\mathscr{W}$ への写像 f が各変数について線形のとき，つまり各 $j\in\{1,\ldots,k\}$ において

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{j-1},a\boldsymbol{x}_j+b\boldsymbol{y}_j,\boldsymbol{x}_{j+1},\ldots,\boldsymbol{x}_k)\\ =&af(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k)+bf(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{j-1},\boldsymbol{y}_j,\boldsymbol{x}_{j+1},\ldots,\boldsymbol{x}_k)\end{aligned}$$

を満たすとき，写像 f を **k 重線形変換**といい，このような k 重線形変換全体のなす集合を $\mathscr{F}(\mathscr{V}_1\times\cdots\times\mathscr{V}_k,\mathscr{W})$ で表す．$k=2$ のときには，**双線形変換**ともいう．また，k が 2 以上のこのような変換を一般に**多重線形変換**という．とくに，$\mathscr{W}$ が 1 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}$ のときには，これらの名称の「変換」の部分を「**汎関数**」に置き換えて呼ぶ．

3.1 節でテンソル積の定義に，補題 2.1.9 と問題 40 を使うので，それをつぎのように多重線形変換の場合へ拡張しておく．

命題 2.2.10 k 個のベクトル空間 $\mathscr{V}_1,\ldots,\mathscr{V}_k$ に対して，$n_j=\dim(\mathscr{V}_j)$ とする．このとき，

(i) $\mathscr{V}_1\times\cdots\times\mathscr{V}_k$ からベクトル空間 $\mathscr{W}$ への k 重線形変換全体のなす集合は，各点ごとに定義される和 $f+g$ と定数倍 cf

$$(f+g)(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k)=f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k)+g(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k),$$

$$(cf)(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k) = cf(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k)$$

の演算によりベクトル空間になる.

(ii) $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathscr{V}_1 \times \cdots \times \mathscr{V}_k, \mathbb{C})$ とする. 各 $\mathscr{V}_j$ の基底 $\{\boldsymbol{b}_{1,j}, \dots, \boldsymbol{b}_{n_j,j}\}$ に対して

$$f_{i_1,\dots,i_k}(\boldsymbol{b}_{j_1,1}, \dots, \boldsymbol{b}_{j_k,k}) = \delta_{i_1,j_1} \cdots \delta_{i_k,j_k}$$

を満たす k 重線形汎関数のなす集合

$$\{f_{i_1,\dots,i_k} \mid i_1 = 1, \dots, n_1; \dots; i_k = 1, \dots, n_k\} \tag{2.5}$$

はベクトル空間 $\mathscr{F}$ の基底である.

(iii) (ii) において, $\dim(\mathscr{F}) = n_1 n_2 \cdots n_k$.

証明　(i) は線形変換の場合と同じである. (iii) は (ii) より明らかであるから, (ii) を示す. ベクトル空間 $\mathscr{F}$ において, $\sum_{i_1,\dots,i_k} c_{i_1,\dots,i_k} f_{i_1,\dots,i_k} = 0$ とすれば, 任意の $j_1, \dots, j_k$ に対して,

$$\begin{aligned} c_{j_1,\dots,j_k} &= \sum_{i_1,\dots,i_k} c_{i_1,\dots,i_k} \delta_{i_1,j_1} \cdots \delta_{i_k,j_k} \\ &= \Bigl(\sum_{i_1,\dots,i_k} c_{i_1,\dots,i_k} f_{i_1,\dots,i_k}\Bigr)(\boldsymbol{b}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{b}_{j_k}) = 0 \end{aligned}$$

となるので, (2.5) の集合は1次独立である. そこで, 任意の $f \in \mathscr{F}$ が

$$f = \sum_{i_1,\dots,i_k} f(\boldsymbol{b}_{i_1,1}, \dots, \boldsymbol{b}_{i_k,k}) f_{i_1,\dots,i_k} \tag{2.6}$$

と表せることがわかれば, (2.5) の集合は $\mathscr{F}$ の基底である. そこで, 各 $\mathscr{V}_j$ $(j = 1, \dots, k)$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}_j = \sum_{i=1}^{n_j} d_{i,j} \boldsymbol{b}_{i,j}$ に対して,

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k} d_{i_1,1} \cdots d_{i_k,k} f(\boldsymbol{b}_{i_1,1}, \dots, \boldsymbol{b}_{i_k,k}) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k} f(\boldsymbol{b}_{i_1,1}, \dots, \boldsymbol{b}_{i_k,k}) \sum_{j_1,\dots,j_k} d_{j_1,1} \cdots d_{j_k,k} \delta_{i_1,j_1} \cdots \delta_{i_k,j_k} \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k} f(\boldsymbol{b}_{i_1,1}, \dots, \boldsymbol{b}_{i_k,k}) \sum_{j_1,\dots,j_k} d_{j_1,1} \cdots d_{j_k,k} f_{i_1,\dots,i_k}(\boldsymbol{b}_{j_1,1}, \dots, \boldsymbol{b}_{j_k,k}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_k} f(\boldsymbol{b}_{i_1,1},\dots,\boldsymbol{b}_{i_k,k}) f_{i_1,\dots,i_k}(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_k).$$

ゆえに，(2.6) 式が成り立つ．よって，(ii) が示された． ■

定義 2.2.11 ベクトル空間 $\mathscr{V}$ と $\mathscr{W}$ に対して，直積集合 $\mathscr{V}\times\mathscr{V}$ から $\mathscr{W}$ への写像が，第 1 変数に関しては共役線形，第 2 変数に関しては線形のとき，その写像を**半双線形変換**という．とくに，$\mathscr{W}$ が 1 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}$ のときには，**半双線形汎関数**という．

例えば，内積は半双線形汎関数である．

命題 2.2.12 有限次元内積空間 $\mathscr{V}$ において，f をその上の半双線形汎関数とすれば，

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{y})$$

を満たす線形変換 X が一意的に存在する．

証明 ベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathscr{V}$ を任意に固定して，$g(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ とすれば，g は $\mathscr{V}$ 上の線形汎関数である．したがって，リースの定理2.1.17により，$g(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})$ を満たすベクトル $\boldsymbol{z}\in\mathscr{V}$ が一意的に存在する．このベクトルは $\boldsymbol{x}$ に依存して決まるので，g, $\boldsymbol{z}$ をそれぞれ $g_{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{x}}$ と書くことにすれば，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{z}_{a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'}|\boldsymbol{y}) &= g_{a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{y}) = f(a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}) = \overline{a}\,f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})\\ &= \overline{a}\,g_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) + g_{\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{y}) = \overline{a}\,(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{x}'}|\boldsymbol{y})\\ &= (a\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{x}'}|\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

となる．したがって，写像 $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{x}}$ は $\mathscr{V}$ 上の線形変換である．そこで，この変換の随伴変換を X とすれば，

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = g_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{y})$$

と表せる．$(\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|X'\boldsymbol{y})$ がすべての $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{V}$ に対して成り立てば，$X = X'$ となるので，一意性もわかる． ■

2.3 矩形行列の行列式再論

第1章の Cullis 行列式の定義 1.4.1 では，まず1列だけからなる行列の行列式を定義し，これを用いて一般の行列の行列式を縦ベクトルの個数に関して帰納的に定義した．この定義は初等的ではあるが，Cullis 行列式の一般的な特徴が必ずしも見えやすいわけではない．そこで，このときに導かれた Cullis 行列式の基本性質を用いて，2.3.2 項において，交代多重線形汎関数の観点から行列式を定義し直してみる．その結果，行列式の本質が簡単な3条件により書き換えられ，行列式のさまざまな展開式や交代冪行列の取り扱いが簡易化され，全体の見通しがよくなる．

手始めに，その準備として，n 次対称群の符号の話を，1.3.2 項で説明した対称群の符号の議論とは少し違った視点から見直してみよう．

2.3.1 置換（並べ替え）の符号

集合 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ から自分自身への単射全体のなす集合を S_n とする．I は有限集合であるから，このときの単射は自動的に全射になる．各単射 $\sigma \in S_n$ は $1, 2, \ldots, n$ と並んでいる列を並べ替えて，1番目には $\sigma(1)$, 2番目には $\sigma(2)$, $\cdots$, n 番目には $\sigma(n)$ とする操作と解釈し，これを

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

で表す．この並べ替えは**置換**と呼ばれている．

いま，n 次多項式

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

において2つの変数 x_i と x_j $(i < j)$ の入れ替えを考える[5]．このとき，右辺の積に現れる因数の中で影響を受ける因数は

$$(x_k - x_i)(x_k - x_j) \quad (k < i),$$

[5] この多項式は問題 23 のファンデルモンドの行列式の $(-1)^{n(n-1)/2}$ 倍である．この結果を知っていれば，以下の議論はこの行列式の列に関する交代性の説明である．

$$(x_i - x_k)(x_k - x_j) \quad (i < k < j),$$

$$(x_i - x_k)(x_j - x_k) \quad (k > j),$$

$$x_i - x_j$$

の4つのタイプに分けられる．2つの変数 x_i と x_j を入れ替えると，上の3つのタイプの場合には，因数の**符号**（$+$ または $-$ のこと）は変わらないが，最後の場合には，因数の符号が変わるので，全体として多項式 p は，変数 x_i と x_j を入れ替えると，多項式 $-p$ に変わることがわかる．したがって，多項式 p はこのような2つの変数の入れ替えを偶数回行っても変わらないが，奇数回行うと $-p$ に変わる．一般の置換はこのような2つの変数の入れ替えを繰り返して得られるので，置換 $\sigma \in S_n$ により，多項式 $p(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ の符号が変わるかどうかにより，置換 σ を実行する際の2つの変数の入れ替えの総数が奇数かまたは偶数かがわかる．そこで**置換 σ の符号**を多項式 p に置換 σ を施したときに，p の係数の符号が $+$ かまたは $-$ かにより，$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ または $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ と定める．したがって，

$$p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表せる．集合 I の置換の中でも，i と j だけを入れ替える置換を**互換**といい，(2.7) 式の表記を略して (i, j) で表す．上で説明したように，互換の符号は -1 である．

註 6 置換 $\sigma \in S_n$ に対して定まる集合 $\{(i,j) \in I \times I \mid i < j,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}$ の元の数は，σ により順番が逆転した対の個数であるから，これを σ の**転倒数**といい，$\ell(\sigma)$ で表す．この数を用いて得られる写像

$$\sigma \in S_n \longmapsto (-1)^{\ell(\sigma)} \in \{1, -1\}$$

は置換 σ の符号と一致する．

対称群

集合 S_n は通常 n 次**対称群**と呼ばれ，$I = \{1, 2, \ldots, n\}$ における各種の対称性（並べ替えにより保存される量）を記述する際に利用されている．(2.7) 式で表す置換は，各 i の下に $\sigma(i)$ が書いてあって，i 番目に $\sigma(i)$ を並べよと

いう内容であるから，別の $\sigma' \in S_n$ を用いて，

$$\begin{pmatrix} \sigma'(1) & \sigma'(2) & \cdots & \sigma'(n) \\ \sigma(\sigma'(1)) & \sigma(\sigma'(2)) & \cdots & \sigma(\sigma'(n)) \end{pmatrix}$$

と書いたものも，同じ置換 σ である．他方，2 つの置換 σ, σ' をこの順に続けて行った場合には

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma'(1) & \cdots & \sigma'(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \\ \sigma'(\sigma(1)) & \cdots & \sigma'(\sigma(n)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma'(\sigma(1)) & \cdots & \sigma'(\sigma(n)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せるので，この 2 つの置換を繰り返して得られる置換を $\sigma' \cdot \sigma$ で表す．実は S_n はこの合成を積演算として群になっている．このとき，(2.7) 式において，上下を入れ替えて得られる，もとへ戻す置換を σ^{-1} で表す．つまり

$$\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = \mathrm{id}$$

が成り立っている．ただし，id は恒等写像である．この概念は，5 次以上の代数方程式は代数的に解けないことを初めて示したアーベルやガロアの理論をきっかけに，広く普及するようになり，今では数学の基本概念の 1 つになっている．

置換 σ が，$i < j$ に対して，$i+1$ から j の間にある数を 1 つずつ前にずらして行き，最後に j のところを i にする置換

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & i+1 & i+2 & \cdots & j & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

を**巡回置換**といい，$(i, i+1, \ldots, j)$ で表す．これは互換の積として

$$(i, i+1, \ldots, j) = (i, j) \cdot \cdots \cdot (i, i+2) \cdot (i, i+1)$$

と表せる．例えば，$i = 3, j = 6, n = 8$ のとき，

$$(3,4,5,6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = (3,6)(3,5)(3,4)$$

となる.

集合 $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ の置換のうち，隣接した元の互換 $(i, i+1)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ を σ_i で表すと，

$$\sigma_i \cdot \sigma_i = \mathrm{id}, \quad |i-j| \geq 2 \Longrightarrow \sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i,$$

$$\sigma_i \cdot \sigma_{i\pm1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i\pm1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i\pm1}$$

が成り立つ．どの置換もこの $n-1$ 個の互換を繰り返して得られるので，これらは対称群 S_n の生成元である．例えば，$(3,4,5,6) = \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5$, $(3,5) = \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3$, $(3,6) = \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3$ などと表せる.

問題 48 次のことを示せ.

(i) $\mathrm{sgn}(\sigma \cdot \sigma') = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma')$.
(ii) $\mathrm{sgn}((i, i+1, \ldots, j)) = (-1)^{j-i}$.
(iii) $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

置換の性質を使って定義される関数の定義を与えておく.

定義 2.3.1 n 変数の関数 $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ が，任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対して，

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

を満たすとき，f を**対称関数**という．また，

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n)$$

を満たすとき，f を**交代関数**という.

関数の任意の 2 つの変数を入れ替えると符号が変わることと，関数が交代関数であることは同値である.

2.3.2 Cullis 行列式の再定義

Cullis 行列式について，1.4.3 項で導かれた定理 1.4.11 と定理 1.4.13 の基本性質を参考にして，この項でも改めて Cullis 行列式を再定義する．これら 2 つの定義は同値であるが，今後の議論には，行列式の特徴を用いたこの項

で与える定義の方が扱いやすいことがわかるだろう．

縦ベクトルのなす n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の自然基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ で表す．第1章の実ベクトル空間の場合と同じように，縦ベクトルと横ベクトルをそれぞれ，列ベクトル，行ベクトルともいう．

また，$n \times k$ 行列 X をその列ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ を用いて，

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$$

とも表す．また，$X_1 = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ かつ $X_2 = (\boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ のときには，$(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ を (X_1, X_2) のようにも表すことにする．

定義 2.3.2　$1 \leq k \leq n$ を満たす n, k に対して，$X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ を $n \times k$ 行列とする．このとき，交代 k 重線形汎関数 $D_{n,k}$ で規格条件

$$D_{n,k}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}) = \mathrm{sgn}_I(\{i_1, \ldots, i_k\}) = (-1)^{\sum_{j=1}^{k}(i_j - j)},$$
$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$$

を満たすものがとる値 $D_{n,k}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ を行列 X の **Cullis 行列式**といい

$$\det{}_{n,k}(X)$$

で表す．とくに，X が n 次正方行列の場合には，$\det{}_{n,n}(X)$ を $\det{}_n(X)$ で表す．

この行列式 $\det{}_{n,k}(X)$ を正方行列の場合と同じように，

$$|\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k|$$

または

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{vmatrix}$$

とも表す．

上の定義 2.3.2 で使われた数 $(-1)^{\sum_{j=1}^{k}(i_j-j)}$ は，定義 1.3.14 で与えた，$c=\{i_1,\ldots,i_k\}$ の Cullis 符号と同じものである．

少し後の命題 2.3.7 により，交代 k 重線形汎関数 $D_{n,k}$ の値が，規格条件により，一意的に決まることと，正方行列に対する $\det{}_n(X)$ の値が通常の行列式の値と一致することがわかる．

2.3.3 簡単な例

まず，定義 2.3.2 に従って，簡単な例を扱ってみよう．

例 2.3.3 Cullis 行列式を定義するときの汎関数の多重線形性と交代性の例を挙げる．つぎの最初の 2 つが多重線形性であり，3 番目が交代性である．

(i)

$$\begin{vmatrix} \alpha a_1+\beta a_2 & b \\ \alpha c_1+\beta c_2 & d \\ \alpha e_1+\beta e_2 & f \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \\ e_1 & f \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \\ e_2 & f \end{vmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{vmatrix} a & \alpha b_1+\beta b_2 \\ c & \alpha d_1+\beta d_2 \\ e & \alpha f_1+\beta f_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \\ e & f_1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \\ e & f_2 \end{vmatrix}.$$

(iii)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \\ f & e \end{vmatrix}.$$

したがって，$a=\gamma b$, $c=\gamma d$, $e=\gamma f$ を満たす定数 γ が存在するときには，この行列式の値は 0 である．

つぎに，Cullis 行列式を定義に従って直接計算する例を挙げる．

例 2.3.4　3×1 行列の場合．定義 2.3.2 において，$n=3$, $k=1$ であるから，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} &= D_{3,1}(a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3) \\ &= aD_{3,1}(\boldsymbol{e}_1) + bD_{3,1}(\boldsymbol{e}_2) + cD_{3,1}(\boldsymbol{e}_3) \\ &= a(-1)^{1-1} + b(-1)^{2-1} + c(-1)^{3-1} \\ &= a - b + c\end{aligned}$$

となる．

例 2.3.5　3×2 行列の場合．$n=3$, $k=2$ であるから，つぎのようになる．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{vmatrix} =& D_{3,2}(a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2 + e\boldsymbol{e}_3, b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2 + f\boldsymbol{e}_3) \\ =& abD_{3,2}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) + adD_{3,2}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) + afD_{3,2}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3) \\ &+ cbD_{3,2}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) + cdD_{3,2}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) + cfD_{3,2}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) \\ &+ ebD_{3,2}(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1) + edD_{3,2}(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2) + efD_{3,2}(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3) \\ =& (ad-bc)D_{3,2}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) + (af-be)D_{3,2}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3) \\ &+ (cf-de)D_{3,2}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) \\ =& (ad-bc)(-1)^{(1-1)+(2-2)} + (af-be)(-1)^{(1-1)+(3-2)} \\ &+ (cf-de)(-1)^{(2-1)+(3-2)} \\ =& (ad-bc) - (af-be) + (cf-de) \\ =& \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

一般に，$n\times 2$ 行列 $X=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$ において，例 2.3.3 からわかるように，列ベクトルのなす集合 $\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\}$ が 1 次従属ならば，その行列式の値は 0 である．また，例 2.3.5 において，$a=b=c=d=1$, $e=0$, $f=-2$ の場合からわかるように，列ベクトルのなす集合 $\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\}$ が 1 次独立であっても，

その行列式の値が 0 になることがある．一般的な結果は系 2.4.7 や系 3.4.5 に与えられている．

2.3.4 一般行列式展開と符号

対称群 S_n とその符号の概念を拡張して，集合 S_k^I と単射の符号という概念を定義 1.4.14 において与えたが，ここでは，これを用いて，正方行列の定義によく利用される行列式の一般展開式を，Cullis 行列式の場合へ一般化する．

命題 2.3.6 $n \times k$ 行列 $X = (x_{i,j})$ に対して，つぎの式が成り立つ．

$$\det{}_{n,k}(X) = \sum_{\sigma \in S_k^I} \mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(k),k}.$$

証明 $X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ とする．各列 $\boldsymbol{x}_j$ は $\sum_{i=1}^n x_{i,j}\boldsymbol{e}_i$ と表せるので，$D_{n,k}$ の多重線形性により，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(X) &= D_{n,k}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) \\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_k) \in I^k} x_{i_1,1} \cdots x_{i_k,k} D_{n,k}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}).\end{aligned}$$

また，$D_{n,k}$ の交代性により，添え字 $i_1, \ldots, i_k$ のうちどれか 2 つが一致するときには，$D_{n,k}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}) = 0$ となる．したがって，右辺の和を考えるときには，添え字がすべてが違っている場合だけを考えればよい．この場合には，$\sigma(j) = i_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ となる単射 $\sigma \in S_k^I$ が一意的に存在する．いま，$\sigma(K) \in \mathscr{C}_k^I$ の元を小さい順に並べたものを $i'_1, i'_2, \ldots, i'_k$ とすると，多重線形汎関数 $D_{n,k}$ の交代性により，

$$\begin{aligned}&D_{n,k}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}) \\ =&D_{n,k}(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{e}_{\sigma(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(k)}) \\ =&\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(k) \\ i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_k \end{pmatrix} D_{n,k}(\boldsymbol{e}_{i'_1}, \boldsymbol{e}_{i'_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i'_k}) \\ =&\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)\end{aligned}$$

となる．ただし，右辺は定義 1.4.14 で与えた単射 σ の符号である．ゆえに，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(X) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in I^k} x_{i_1,1}\cdots x_{i_k,k}D_{n,k}(\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_k}) \\ &= \sum_{\sigma\in S_k^I} \mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(k),k}.\end{aligned}$$ ■

この一般展開式から，X が n 次正方行列の場合には，$S_n^I = S_n$ かつ $\mathrm{sgn}_I(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ であるから，定理 1.3.8 の証明と同じようにして，

$$\det{}_n(X^*) = \overline{\det{}_n(X)}$$

となることがわかる．

命題 2.3.7　$c \in \mathscr{C}_k^I$ ならば，$\mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_I(I\setminus c) = (-1)^{k(n-k)}$.

証明　$c \in \mathscr{C}_k^I$ と $I\setminus c$ の元を小さい順に並べたものを，それぞれ $i_1,\ldots,i_k$, $i_{k+1},\ldots,i_n$ とし，符号 $\mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_I(I\setminus c)$ を計算するときに現れる，-1 の肩に付ける指数だけを計算する．このとき，$i_1+\cdots+i_n = 1+\cdots+n$ であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{k}(i_\ell-\ell)+\sum_{\ell=1}^{n-k}(i_{k+\ell}-\ell) &= \sum_{\ell=n-k+1}^{n}\ell-\sum_{\ell=1}^{k}\ell \\ &= \left\{k(n-k)+\sum_{\ell=1}^{k}\ell\right\}-\sum_{\ell=1}^{k}\ell \\ &= k(n-k).\end{aligned}$$ ■

命題 2.3.8　$c \in \mathscr{C}_k^I$ の元を小さい順に並べたものを $i_1,\ldots,i_k$ とし，$I\setminus c$ の元を小さい順に並べたものを $i_{k+1},\ldots,i_n$ とする．このとき，

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix} = \mathrm{sgn}_I(c).$$

証明　列 $1,2,\ldots,n$ を $i_1,i_2,\ldots,i_n$ と並べ替えることを考える．まず，列 $\{1,2,\ldots,n\}$ において，i_1 を左に向かって，隣接互換を i_1-1 回繰り返して，

1 番目へ移動する．これは巡回置換 $(1,2,\ldots,i_1)$ の逆の置換 $(1,2,\ldots,i_1)^{-1}$ で与えられる．つぎに，i_2 も左に向かって，隣接互換を i_2-2 回繰り返して，2 番目へ移動する．このとき，i_1 はすでに 1 番目に来ていて i_2 と互換する必要がないので，互換の回数が i_2-1 より 1 回少なくてすんでいる．これは巡回置換 $(1,2,\ldots,\widehat{i_1},\ldots,i_2)$ の逆の置換 $(1,2,\ldots,\widehat{i_1},\ldots,i_2)^{-1}$ で与えられる．ここでは，$\widehat{i_1}$ は i_1 を取り除くことを意味している．以下，同様な操作を i_k まで繰り返すと，残りの i_{k+1} から i_n までは自動的に決まってしまう．これら巡回置換の手順を記述する際，巡回置換 $(2,4,7)$ を $(1,2,3,\ldots,7\backslash 1,3,5,6)$ のように，1 から 7 までの数の中で動かさないものを後半に書くことにする．この記法を使うと，$1,2,\ldots,n$ を $i_1,i_2,\ldots,i_n$ と並べ替える置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

は，上のような巡回置換を繰り返して得られる巡回置換の積

$$(1,2,\ldots,i_k\backslash i_1,i_2,\ldots,i_{k-1})^{-1}\cdots(1,2,\ldots,i_2\backslash i_1)^{-1}(1,2,\ldots,i_1)^{-1}$$

として表せる．したがって，この置換の符号は

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}((1,2,\ldots,i_1)(1,2,\ldots,i_2\backslash i_1)\cdots(1,2,\ldots,i_k\backslash i_1,i_2,\ldots,i_{k-1})) \\
=&\mathrm{sgn}((1,2,\ldots,i_1))\prod_{\ell=2}^{k}\mathrm{sgn}((1,2,\ldots,i_\ell\backslash i_1,i_2,\ldots,i_{\ell-1})) \\
=&\prod_{\ell=1}^{k}(-1)^{i_\ell-\ell}=\mathrm{sgn}_I(c)
\end{aligned}$$

となる． ■

2.4 基本公式

この節では，Cullis 行列式の満たす基本的な性質を整理して説明する．今後，本書を通じて説明する Cullis 行列式の議論は，どれも，この節で述べる結果に帰着され，ある意味で，この節の性質を知るだけで，Cullis 行列式のおおよその様子を理解することができる．

2.4.1　射影 $\boldsymbol{P_c}$ と等長変換 $\boldsymbol{E_c}$

ここで，これから繰り返し使う射影と等長変換の記号を準備する．

各 $c \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，集合 $\{\boldsymbol{e}_j \mid j \in c\}$ により張られる $\mathbb{C}^n$ の k 次元部分ベクトル空間への射影を P_c で表す．P_c は $M_n(\mathbb{C})$ の元である．したがって，

$$P_c \boldsymbol{e}_m = \begin{cases} \boldsymbol{e}_m & (m \in c) \\ \boldsymbol{0} & (m \notin c) \end{cases}.$$

つぎに，定義 1.3.14 の直後に定義した線形変換 E_c を複素ベクトル空間の場合へ拡張し，同じ記号で表すことにする．いま，k 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^k$ の自然基底を，$\mathbb{C}^n$ の自然基底と区別するために，肩に添え字 K を付けて，$\{\boldsymbol{e}_1^K, \boldsymbol{e}_2^K, \ldots, \boldsymbol{e}_k^K\}$ で表す．各 $c \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，その元を小さい順に並べた $i_1, i_2, \ldots, i_k$ を用いて，$\mathbb{C}^k$ から $\mathbb{C}^n$ への等長変換 E_c を，条件 $E_c \boldsymbol{e}_j^K = \boldsymbol{e}_{i_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ を満たす $n \times k$ 行列とする．この変換は

$$(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k})$$

とも表され，その随伴行列 E_c^* は $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^k$ への

$$E_c^* \boldsymbol{e}_m = \begin{cases} \boldsymbol{e}_j^K & (m = i_j \ (j = 1, \ldots, k)) \\ \boldsymbol{0} & (m \notin c) \end{cases}$$

を満たす余等長変換である．したがって，$E_c E_c^* = P_c$ でもある．また，$n \times k$ 行列 $X = (x_{i,j})$ に対して，$E_c^* X$ は，X から添え字が c に属さない行を取り除いて得られる，k 次部分正方行列

$$\begin{pmatrix} x_{i_1,1} & x_{i_1,2} & \cdots & x_{i_1,k} \\ x_{i_2,1} & x_{i_2,2} & \cdots & x_{i_2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i_k,1} & x_{i_k,2} & \cdots & x_{i_k,k} \end{pmatrix}$$

である．このとき，この行列の行の番号が通常の $1, 2, \ldots, k$ の代わりに，$i_1, i_2, \ldots, i_k$ となっていることに注意すれば，行列式の値は正方行列の場合に知られている通常の展開式

$$\det{}_k(E_c^*X) = \sum_{\substack{\sigma\in S_k^I \\ \sigma(K)=c}} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k)\end{pmatrix} x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(k),k}$$

で与えられる.

例 2.4.1 3×2 行列 $X=(x_{i,j})$ の $c=\{1,3\}$ に対応する行以外を 0 にした行列，あるいはその行に対応する部分だけからなる正方行列の記述はつぎのようになる．$P_c=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_3)$ であるから,

$$P_cX=\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ 0 & 0 \\ x_{3,1} & x_{3,2}\end{pmatrix},\quad E_c^*X=\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2}\end{pmatrix}.$$

つぎの 2 つの補題は行列式を計算するときに基本的な役割を果たす．差し当たっては，定理 2.4.4 の主張 (ii) の証明において使う予定である．

第 1 章では，つぎの補題 2.4.2 の主張 (i) を定理 1.4.13 として導いた．第 2 章では，この結果を踏まえて，Cullis 行列式を新たに定義し直しているので，つぎに示す補題 2.4.2 の主張 (i) は定義 2.3.2 の規格条件を読み替えているだけである．

補題 2.4.2 任意の $c\in\mathscr{C}_k^I$ に対して,

(i) $\det{}_{n,k}(E_c)=\operatorname{sgn}_I(c)$.

(ii) $\det{}_n((E_c,E_{I\setminus c}))=\operatorname{sgn}_I(c)$.

(iii) $\sigma\in S_k^I$ かつ $E_\sigma=(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma(k)})\in M_{n,k}(\mathbb{C})$ に対して,

$$\det{}_{n,k}(E_\sigma)=\operatorname{sgn}_{n,k}(\sigma).$$

証明 (i) 定義 2.3.2 の規格条件により，直ちにわかる．

(ii) c の元を小さい順に並べた $i_1,\ldots,i_k$ と $I\setminus c$ の元を小さい順に並べた $i_{k+1},\ldots,i_n$ を用いると,

$$\det{}_n((\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n))=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\det((E_c,E_{I\setminus c})).$$

ゆえに，命題 2.3.8 により，主張 (ii) がわかる．

(iii) 主張 (i) により，$\det_{n,k}(E_c) = \mathrm{sgn}_I(c)$ となる．ここで，$c = \sigma(K)$ の元を小さい順に並べたものを $i_1, \ldots, i_k$ とすると，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(E_\sigma) &= D_{n,k}(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(k)}) \\ &= \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}\sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \\ i_1 & \cdots & i_k\end{pmatrix} D_{n,k}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}) \\ &= \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}\sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \\ i_1 & \cdots & i_k\end{pmatrix} \mathrm{sgn}_I(c) = \mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

補題 2.4.3　$1 \le k < \ell \le n$ とする．行列 $X = (X_1, X_2) \in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$ が $X_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C}), X_2 \in M_{n,\ell-k}(\mathbb{C})$ で与えられているとする．このとき，

$$\det{}_{n,\ell}(X) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det{}_k(E_c^* X_1) \det{}_{n,\ell}((E_c, X_2)).$$

証明　$X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell)$ かつ $\boldsymbol{x}_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j}\boldsymbol{e}_i$ とする．このとき，行列式 $\det{}_{n,\ell}(X)$ は汎関数 $D_{n,\ell}$ の多重線形性と交代性により，

$$\begin{aligned}&\sum_{m_1,\ldots,m_k=1}^{n} x_{m_1,1} \cdots x_{m_k,k} D_{n,\ell}(\boldsymbol{e}_{m_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m_k}, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell) \\ &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_k=1 \\ \{m_1,\ldots,m_k\}=c}}^{n} x_{m_1,1} \cdots x_{m_k,k} D_{n,\ell}(\boldsymbol{e}_{m_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m_k}, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell)\end{aligned}$$

と展開される．c の元を小さい順に並べたものを $i_1, \ldots, i_k$ とする．右辺に現れる $D_{n,\ell}(\boldsymbol{e}_{m_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m_k}, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell)$ は

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_k \\ m_1 & \cdots & m_k\end{pmatrix} D_{n,\ell}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell)$$

と表せ，さらに $D_{n,\ell}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell)$ は $\det{}_{n,\ell}((E_c, X_2))$ と書き直せる．他方，

$$\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_k=1 \\ \{m_1,\ldots,m_k\}=c}}^{n} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_k \\ m_1 & \cdots & m_k\end{pmatrix} x_{m_1,1} \cdots x_{m_k,k}$$

が $\det_k(E_c^* X_1)$ であることに注意すれば，

$$\det_{n,\ell}(X) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det_k(E_c^* X_1) \det_{n,\ell}((E_c, X_2)). \qquad \blacksquare$$

以上の準備の下に，矩形行列の行列式の計算を，正方行列の行列式の計算に帰着させる定理 1.4.9 を，少し書き換えることによりつぎの定理が得られる．この結果は，これから Cullis 行列式の議論を展開していくときに，最も基本的な役割を果たす．そこで，これからの議論には，第 1 章の証明と重複する部分もあるが，繰り返すことにする．

定理 2.4.4 $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ とする．各 $c \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，

(i) $\det_{n,k}(P_c X) = \mathrm{sgn}_I(c) \det_k(E_c^* X)$.

(ii) $\det_{n,k}(P_c X) = \det_n((X, E_{I \setminus c}))$.

(iii) $\det_{n,k}(X) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det_{n,k}(P_c X)$.

証明 (i) $n \times k$ 行列 $X = (x_{i,j})$ に対して，行列 $P_c X$ は，X において添え字が c に属さない行ベクトルをすべて零ベクトルに置き換えて得られる $n \times k$ 行列である．そこで，c の元を小さい順に並べたものを $i_1, \ldots, i_k$ とすれば，命題 2.3.6 の一般展開式により，

$$\begin{aligned}
\det_{n,k}(P_c X) &= \sum_{\substack{\sigma \in S_k^I \\ \sigma(K) = c}} \mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(k),k} \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_k^I \\ \sigma(K) = c}} \mathrm{sgn}_I(c)\ \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \end{pmatrix} x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(k),k} \\
&= \mathrm{sgn}_I(c) \det_k(E_c^* X) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

(ii) 補題 2.4.3 により，

$$\det_n((X, E_{I \setminus c})) = \sum_{d \in \mathscr{C}_k^I} \det_k(E_d^* X) \det_n((E_d, E_{I \setminus c})).$$

汎関数 $D_{n,n}$ の交代性と補題 2.4.2 により，$c, d \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，

$$\det_n((E_d, E_{I \setminus c})) = \delta_{c,d}\ \mathrm{sgn}_I(c).$$

ゆえに，主張 (i) を合わせると，

$$\det{}_n((X, E_{I\setminus c})) = \operatorname{sgn}_I(c)\det{}_k(E_c^* X) = \det{}_{n,k}(P_c X).$$

(iii) 命題 2.3.6 の一般展開式により，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(X) &= \sum_{\sigma\in S_k^I} \operatorname{sgn}_{n,k}(\sigma) x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(k),k}\\ &= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\sum_{\substack{\sigma\in S_k^I\\ \sigma(K)=c}} \operatorname{sgn}_{n,k}(\sigma) x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(k),k}\\ &= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \det{}_{n,k}(P_c X).\end{aligned}$$

ただし，最後の等号は (2.8) 式の 1 行目による. ■

この定理 2.4.4 の主張 (iii) は行列式の計算でよく利用される.

系 2.4.5 各 $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ と $c \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，

$$\begin{aligned}\det{}_n((E_{I\setminus c}, X)) &= (-1)^{k(n-k)}\det{}_{n,k}(P_c X)\\ &= \operatorname{sgn}_I(I\setminus c)\det{}_k(E_c^* X).\end{aligned}$$

証明 命題 2.3.8 と定理 2.4.4 の (ii) の証明で使われた式により，

$$\begin{aligned}\det{}_n((E_{I\setminus c}, X)) &= (-1)^{k(n-k)}\det{}_n((X, E_{I\setminus c}))\\ &= (-1)^{k(n-k)}\det{}_{n,k}(P_c X)\\ &= (-1)^{k(n-k)}\operatorname{sgn}_I(c)\det{}_k(E_c^* X)\\ &= \operatorname{sgn}_I(I\setminus c)\det{}_k(E_c^* X).\end{aligned}$$ ■

つぎの系の主張 (ii) はすでに系 1.4.12 でも示されている.

系 2.4.6 (i) X が $n\times 1$ 行列 (x_i) ならば，$\det{}_{n,1}(X) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i$.

(ii) X が $n\times(n-1)$ 行列ならば，$\det{}_{n,n-1}(X) = \det{}_n((X, \widetilde{\mathbf{1}}))$. ただし，$\widetilde{\mathbf{1}} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i$.

証明 (i) 行列式の定義 2.3.2 から直ちに

$$\det{}_{n,1}(X) = D_{n,1}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i D_{n,1}(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i.$$

(ii) 添え字の集合 $\mathscr{C}^I_{n-1}$ は $\{I \setminus \{i\} \mid i = 1, \ldots, n\}$ と表せるので，定理 2.4.4 の主張 (ii) と (iii) により，

$$\det{}_{n,n-1}(X) = \sum_{i=1}^{n} \det{}_n((X, \boldsymbol{e}_i)) = \det{}_n((X, \widetilde{\mathbf{1}})).$$ ■

系 2.4.7 $n \times (n-1)$ 行列 X が非退化のとき，$\det{}_{n,n-1}(X) = 0$ であることと $\widetilde{\mathbf{1}} \in X\mathbb{C}^n$ は同値である．ただし，$\widetilde{\mathbf{1}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{e}_j$ である．

証明 ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}$ が行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1})$ の像の元の場合には，$\widetilde{\mathbf{1}}$ が $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ の 1 次結合で表せるから，$\det{}_n((X, \widetilde{\mathbf{1}})) = 0$．したがって，系 2.4.6 により，$\det{}_{n,n-1}(X) = 0$．

逆に，$\det{}_{n,n-1}(X) = 0$ ならば，$\det{}_n((X, \widetilde{\mathbf{1}})) = 0$ であるから，集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \widetilde{\mathbf{1}}\}$ は 1 次従属である．他方，X は非退化であるから，集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}\}$ は 1 次独立である．したがって，ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}$ は X の像に含まれる． ■

この系は系 2.5.3 および第 3 章の系 3.4.5 において，$n-k$ が奇数の場合へ一般化される．

問題 49 補題 2.4.3 と同じ条件の下でつぎの式を示せ．

$$\det{}_{n,\ell}((X_1, X_2)) = \sum_{d \in \mathscr{C}^I_{\ell-k}} \det{}_{n,\ell}((X_1, E_d)) \det{}_{\ell-k}(E_d^* X_2).$$

2.4.2 Cullis 行列式の特徴付け

まず，正方行列の場合の列に関するラプラス展開が，矩形行列の場合にも同じように成り立つことを示す．そのために，ここでは，定義 1.3.14 で与えた Cullis 符号の定義を，同じ名前のまま拡張することにする．ラプラス展開に関するさらに詳細な議論はつぎの 2.5 節と後の 3.3.3 項において行う．

以後，集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ を I，その部分集合 $\{1,2,\ldots,\ell\}$ を L とする．いま $k<\ell\leq n$ とし，$J\in\mathscr{C}_\ell^I$ とする．つぎに，J の k 個の元からなる部分集合全体のなす集合族を $\mathscr{C}_k^J$ で表すことにする．

定義 2.4.8　各 $d\in\mathscr{C}_k^J$ に対し，大小関係を保存する全単射 $\rho:J\to L$ を用いて決まる値

$$\mathrm{sgn}_L(\rho(d))=(-1)^{(\sum_{i\in\rho(d)}i)-(k(k+1)/2)}$$

を d の **Cullis 符号**といい，$\mathrm{sgn}_J(d)$ で表す．

この定義の左辺の Cullis 符号 $\mathrm{sgn}_L(\rho(d))$ は，定義 1.3.14 の Cullis 符号 $\mathrm{sgn}_I(\rho(d))$ と一致しているので，$\mathrm{sgn}_J(d)=\mathrm{sgn}_I(\rho(d))$ でもある．

すぐ後のラプラス展開の定理の証明に利用するために，補題 2.4.2 の主張 (ii) をこの記号を用いて拡張しておく．

補題 2.4.9　$1\leq k<\ell\leq n$, $c\in\mathscr{C}_k^I$, $d\in\mathscr{C}_{\ell-k}^I$ に対して，$c\cap d=\emptyset$ ならば，

$$\det{}_n((E_c,E_d,E_{I\setminus(c\cup d)}))=\mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_{I\setminus c}(d).$$

証明　補題 2.4.2 の (ii) により，

$$\det{}_n((\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n))=\mathrm{sgn}_I(c)\det{}_n((E_c,E_{I\setminus c})).$$

c, $I\setminus c$ の元を小さい順に並べたものをそれぞれ，$i_1,\ldots,i_k$, $i_{k+1},\ldots,i_n$ とする．つぎに，$I\setminus c$ を 2 つに分けて d, $I\setminus(c\cup d)$ とし，それぞれの元を小さい順に並べたものを，$j_{k+1},\ldots,j_\ell$, $j_{\ell+1},\ldots,j_n$ とすれば，

$$\begin{aligned}&\det{}_n((E_c,E_{I\setminus c}))\\ =&\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_k&i_{k+1}&\cdots&i_\ell&i_{\ell+1}&\cdots&i_n\\ i_1&\cdots&i_k&j_{k+1}&\cdots&j_\ell&j_{\ell+1}&\cdots&j_n\end{pmatrix}\\ &\times\det{}_n((E_c,E_d,E_{I\setminus(c\cup d)})).\end{aligned}$$

ここで，$I\setminus c$ から $\{1,2,\ldots,n-k\}$ への順序を保存する全単射を ρ とすると，定義 2.4.8 により，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_\ell & i_{\ell+1} & \cdots & i_n \\ i_1 & \cdots & i_k & j_{k+1} & \cdots & j_\ell & j_{\ell+1} & \cdots & j_n \end{pmatrix}\\
=&\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \ell-k & \ell-k+1 & \cdots & n-k \\ \rho(j_{k+1}) & \cdots & \rho(j_\ell) & \rho(j_{\ell+1}) & \cdots & \rho(j_n) \end{pmatrix}\\
=&\mathrm{sgn}_{I\setminus c}(d)
\end{aligned}
$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
\det{}_n((\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)) &= \mathrm{sgn}_I(c)\det{}_n((E_c, E_{I\setminus c}))\\
&= \mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_{I\setminus c}(d)\det{}_n((E_c, E_d, E_{I\setminus(c\cup d)})).
\end{aligned}
$$

ここで, $\det{}_n(1_n) = 1$ であるから, 補題が示された. ■

この補題 2.4.9 を用いると, 定理 1.3.15 で示した正方行列の行列式に関するラプラス展開が, Cullis 行列式に対しても同じように成り立つことがわかる.

定理 2.4.10 (ラプラス展開) $1 \le k < \ell \le n$ とする. 行列 $X = (X_1, X_2) \in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$ が $X_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C}), X_2 \in M_{n,\ell-k}(\mathbb{C})$ で与えられているとする. このとき,

$$
\begin{aligned}
\det{}_{n,\ell}(X) &= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \det{}_{n,k}(P_c X_1)\det{}_{n-k,\ell-k}(E_{I\setminus c}^* X_2)\\
&= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \mathrm{sgn}_I(c)\det{}_k(E_c^* X_1)\det{}_{n-k,\ell-k}(E_{I\setminus c}^* X_2).
\end{aligned}
$$

証明 補題 2.4.3 により,

$$
\det{}_{n,\ell}(X) = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \det{}_k(E_c^* X_1)\det{}_{n,\ell}((E_c, X_2)).
$$

ここで, $\det{}_{n,\ell}((E_c, X_2)) = (-1)^{k(\ell-k)}\det{}_{n,\ell}((X_2, E_c))$ の右辺の行列式に補題 2.4.3 を適用すると,

$$
\begin{aligned}
\det{}_{n,\ell}((E_c, X_2)) &= (-1)^{k(\ell-k)} \sum_{d\in\mathscr{C}_{\ell-k}^I} \det{}_{\ell-k}(E_d^* X_2)\det{}_{n,\ell}((E_d, E_c))\\
&= \sum_{d\in\mathscr{C}_{\ell-k}^I} \det{}_{n,\ell}((E_c, E_d))\det{}_{\ell-k}(E_d^* X_2).
\end{aligned}
$$

他方，汎関数 $D_{n,\ell}$ の交代性により，$c \cap d \neq \emptyset$ ならば，$\det_{n,\ell}((E_c, E_d)) = 0$ である．$c \cap d = \emptyset$ のときには，定理 2.4.4 の (i) により，$e \in \mathscr{C}_\ell^I$, $e \neq c \cup d$ に対して，ℓ 次正方行列 $E_e^*(E_c, E_d)$ は正則ではないから，

$$\det_{n,\ell}(P_e(E_c, E_d)) = \mathrm{sgn}_I(e) \det_\ell(E_e^*(E_c, E_d)) = 0.$$

したがって，$c \cap d = \emptyset$ のときには，定理 2.4.4 の (iii), (ii) と補題 2.4.9 により，

$$\begin{aligned}\det_{n,\ell}((E_c, E_d)) &= \det_{n,\ell}(P_{c \cup d}(E_c, E_d)) \\ &= \det_n((E_c, E_d, E_{I \setminus (c \cup d)})) = \mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_{I \setminus c}(d).\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\det_{n,\ell}((E_c, X_2)) &= \sum_{\substack{d \in \mathscr{C}_{\ell-k}^I \\ d \subset (I \setminus c)}} \det_{n,\ell}((E_c, E_d)) \det_{\ell-k}(E_d^* X_2) \\ &= \sum_{\substack{d \in \mathscr{C}_{\ell-k}^I \\ d \subset (I \setminus c)}} \mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_{I \setminus c}(d) \det_{\ell-k}(E_d^* X_2).\end{aligned}$$

他方，定義 2.4.8 の大小関係を保存する全単射 $\rho : I \setminus c \to \{1, 2, \ldots, n-k\}$ を用いると，定理 2.4.4 の (iii) と (i) により，

$$\begin{aligned}\det_{n-k,\ell-k}(E_{I \setminus c}^* X_2) &= \sum_{\rho(d) \in \mathscr{C}_{\ell-k}^{\{1, \ldots, n-k\}}} \det_{n-k,\ell-k}(P_d E_{I \setminus c}^* X_2) \\ &= \sum_{d \in \mathscr{C}_{\ell-k}^{I \setminus c}} \mathrm{sgn}_{I \setminus c}(d) \det_{\ell-k}(E_d^* X_2)\end{aligned}$$

となる．ゆえに，

$$\det_{n,\ell}((E_c, X_2)) = \mathrm{sgn}_I(c) \det_{n-k,\ell-k}(E_{I \setminus c}^* X_2).$$

したがって，定理 2.4.4 の (i) により，

$$\begin{aligned}\det_{n,\ell}(X) &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det_k(E_c^* X_1)\mathrm{sgn}_I(c) \det_{n-k,\ell-k}(E_{I \setminus c}^* X_2) \\ &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det_{n,k}(P_c X_1) \det_{n-k,\ell-k}(E_{I \setminus c}^* X_2).\end{aligned}$$

■

問題 50 $1 \le k < \ell \le n$ の場合に，$X_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C}), X_2 \in M_{n,\ell-k}(\mathbb{C})$ とする．$X = (X_1, X_2)$ に対して，つぎのことを示せ．

(i) $P_c X_1 = X_1$ $(c \in \mathscr{C}_k^I)$ ならば，

$$\det{}_{n,\ell}(X) = \mathrm{sgn}_I(c) \det{}_k(E_c^* X_1) \det{}_{n-k,\ell-k}(E_{I\setminus c}^* X_2).$$

(ii) $P_d X_2 = X_2$ $(d \in \mathscr{C}_{\ell-k}^I)$ ならば，行列式 $\det{}_{n,\ell}(X)$ の値は

$$(-1)^{k(\ell-k)} \mathrm{sgn}_I(d) \det{}_{n-(\ell-k),k}(E_{I\setminus d}^* X_1) \det{}_{\ell-k}(E_d^* X_2).$$

問題 51 正方行列 X が矩形行列 $X_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C})$，$X_2 \in M_{n,n-k}(\mathbb{C})$ を用いて (X_1, X_2) と表されているとき，つぎの展開式を示せ．

$$\begin{aligned}\det{}_n(X) &= (-1)^{k(n-k)} \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det{}_k(E_c^* X_1) \det{}_{n,n-k}(P_{I\setminus c} X_2) \\ &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \mathrm{sgn}_I(I \setminus c) \det{}_{n,k}(P_c X_1) \det{}_{n,n-k}(P_{I\setminus c} X_2).\end{aligned}$$

3.2 節に行ってから，正方行列に関して知られている標準的なラプラス展開を別の視点から再度示す．定理 2.4.10 からもわかるように，通常の記述では，ここに現れる符号 $\mathrm{sgn}_I(c)$ を第 2 因子に付けて余因子行列が定義されるが，矩形行列を用いると，そのような符号はすでに矩形行列の行列式の中に組み込まれていることがわかる．

つぎに，Cullis 行列式は，正方行列のラプラス展開の第 1 因子として，特徴付けられることを示す．この事実は，第 1 章でも説明したように，Cullis 行列式が正方行列の性質を自然に引き継いでいることの証でもある．

定理 2.4.11 ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ における交代 k 重線形汎関数 $F_{n,k}$ に対して，つぎの 2 条件は同値である．

(i) $F_{n,k}$ は Cullis 行列の規格条件を満たす．

(ii) n 次正方行列 $X = (X_1, X_2)$ が $X_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C}), X_2 \in M_{n,n-k}(\mathbb{C})$ で与えられている場合には

$$\det{}_n(X) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} F_{n,k}(P_c X_1) \det{}_{n-k}(E_{I\setminus c}^* X_2).$$

証明 (i) ⇒ (ii) 定理 2.4.10 において，$\ell = n$ の正方行列の場合より直ちに

わかる．

(ii) ⇒ (i) 各 $c,\ d \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，

$$\det{}_{n-k}(E_{I\setminus c}^* E_{I\setminus d}) = \delta_{c,d} \det{}_{n-k}(1_{n-k}) = \delta_{c,d}.$$

ここで，条件 (ii) を仮定すれば，任意の $X_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ に対して，

$$\det{}_n((X_1, E_{I\setminus d})) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} F_{n,k}(P_c X_1) \det{}_{n-k}(E_{I\setminus c}^* E_{I\setminus d}) = F_{n,k}(P_d X_1).$$

ここで，X_1 に E_d を代入すると，補題 2.4.2 の (ii) により，

$$F_{n,k}(E_d) = F_{n,k}(P_d E_d) = \det{}_n((E_d, E_{I\setminus d})) = \operatorname{sgn}_I(d).$$

ゆえに，$F_{n,k}$ は Cullis 行列の規格条件を満たす． ■

2.4.3　行ベクトルに関する性質

つぎに，$k < n$ の場合の矩形行列に対して，その行列式の行ベクトルに関する性質を挙げておく．まず，いくつかの行ベクトルが零ベクトルの場合について考えてみよう．

命題 2.4.12　(i) $n-2 \geq k$ とする．$n \times k$ 行列 X の隣り合う 2 つの行ベクトルがともに零ベクトルのとき，これらを取り除いて得られる $(n-2) \times k$ 行列を X' とすれば，

$$\det{}_{n,k}(X) = \det{}_{n-2,k}(X').$$

(ii) $n-1 \geq k$ とする．$n \times k$ 行列 X の第 n 行の行ベクトルが零ベクトルのとき，これを取り除いて得られる $(n-1) \times k$ 行列を Y とすれば，

$$\det{}_{n,k}(X) = \det{}_{n-1,k}(Y).$$

(iii) $n-1 \geq k$ とする．$n \times k$ 行列 X の第 1 行の行ベクトルが零ベクトルのとき，これを取り除いて得られる $(n-1) \times k$ 行列を Z とすれば，

$$\det{}_{n,k}(X) = (-1)^k \det{}_{n-1,k}(Z).$$

証明　(i) 第 i 行と第 $i+1$ 行が零ベクトルであるとする．$c \in \mathscr{C}_k^I$ が $c \cap \{i, i+1\} \neq \emptyset$ を満たすときには，k 次正方行列 $E_c^* X$ が正則ではないから，$\det{}_k(E_c^* X) = 0$．したがって，

$$\det{}_{n,k}(X) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \mathrm{sgn}_I(c) \det{}_k(E_c^* X) = \sum_{d \in \mathscr{C}_k^{I \setminus \{i,i+1\}}} \mathrm{sgn}_I(d) \det{}_k(E_d^* X).$$

他方，大小関係を保存する全単射 $\rho : I \setminus \{i, i+1\} \to I \setminus \{n-1, n\}$ を用いて，定義 1.3.14 において定義した $d \in \mathscr{C}_k^{I \setminus \{i,i+1\}}$ の Cullis 符号

$$\mathrm{sgn}_{I \setminus \{i,i+1\}}(d) = \mathrm{sgn}_{I \setminus \{n-1,n\}}(\rho(d)) = (-1)^{(\sum_{j \in d} \rho(j)) - k(k+1)/2}$$

と，d を $\mathscr{C}_k^I$ の元と見なしたときの Cullis 符号

$$\mathrm{sgn}_I(d) = (-1)^{(\sum_{j \in d} j) - k(k+1)/2}$$

は，差 $j - \rho(j)$ の値が 0 かまたは 2 であるから，一致する．さらに，

$$\det{}_k((E_{\rho(d)}^{I \setminus \{n-1,n\}})^* X') = \det{}_k(E_d^* X)$$

でもあるから，最初の式の右辺は，定理 2.4.4 により，

$$\begin{aligned}
&\sum_{d \in \mathscr{C}_k^{I \setminus \{i,i+1\}}} \mathrm{sgn}_I(d) \det{}_k(E_d^* X) \\
&= \sum_{\rho(d) \in \mathscr{C}_k^{I \setminus \{n-1,n\}}} \mathrm{sgn}_{I \setminus \{n-1,n\}}(\rho(d)) \det{}_k((E_{\rho(d)}^{I \setminus \{n-1,n\}})^* X') \\
&= \det{}_{n-2,k}(X').
\end{aligned}$$

(ii) $n \in c$ ならば，$\det{}_k(E_c^* X) = 0$ となるので，

$$\begin{aligned}
\det{}_{n,k}(X) &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \mathrm{sgn}_I(c) \det{}_k(E_c^* X) \\
&= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^{I \setminus \{n\}}} \mathrm{sgn}_{I \setminus \{n\}}(c) \det{}_k((E_c^{I \setminus \{n\}})^* Y) \\
&= \det{}_{n-1,k}(Y).
\end{aligned}$$

(iii) 上の証明と同様に，大小関係を保存する全単射 $\rho : I \setminus \{1\} \to$

$I \setminus \{n\}$ を用いると，$i - \rho(i) = 1$ より，

$$\operatorname{sgn}_{I\setminus\{n\}}(\rho(c)) = (-1)^{(\sum_{i\in c}\rho(i))-k(k+1)/2} = (-1)^k \operatorname{sgn}_I(c)$$

となるから，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(X) &= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \operatorname{sgn}_I(c)\det{}_k((E_c)^*X)\\ &= (-1)^k \sum_{c\in\mathscr{C}_k^{I\setminus\{1\}}} \operatorname{sgn}_{I\setminus\{n\}}(\rho(c))\det{}_k((E_{\rho(c)}^{I\setminus\{n\}})^*Z)\\ &= (-1)^k \det{}_{n-1,k}(Z).\end{aligned}$$

■

つぎの命題の証明で必要になる記号の準備をする．各 $\tau \in S_n$ に対して，

$$U(\tau) = (\boldsymbol{e}_{\tau(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\tau(n)}) \in U(n)$$

とする．$n \times k$ 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = (x_{i,j})$ に対して，

$$\begin{aligned}U(\tau)\boldsymbol{x}_j &= U(\tau)\sum_{i=1}^n x_{i,j}\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^n x_{i,j}U(\tau)\boldsymbol{e}_i\\ &= \sum_{i=1}^n x_{i,j}\boldsymbol{e}_{\tau(i)} = \sum_{i=1}^n x_{\tau^{-1}(i),j}\boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

となるので，$U(\tau)X = (x_{\tau^{-1}(i),j})$ と表せる．したがって，$U(\tau)$ の左からの積は行列 X の行ベクトルの並べ替えを与えている．また，

$$\det{}_n(U(\tau)) = \operatorname{sgn}(\tau)\det{}_n(1_n) = \operatorname{sgn}(\tau)$$

が成り立つ．

命題 2.4.13　$1 \leq k < n$ かつ $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ とする．

(i) $\det{}_{n,k}(X)$ は行ベクトルに関する汎関数として n 重線形ではない．

(ii) $k = n-1$ ならば，$\det{}_{n,k}(X)$ は行ベクトルに関する汎関数として交代性を満たす．

(iii) $k \geq n-2$ ならば，$\det{}_{n,k}(X)$ は行ベクトルに関する汎関数として交代性を満たさない．

証明 (i) k 次正方行列 Y で正則なものを選び，その下側に 0 だけからなる $n-k$ 行を追加して得られる $n\times k$ 行列を X とする．このとき，命題 2.4.12 により，$\det_{n,k}(X)=\det_k(Y)\neq 0$ が成り立つが，もし行ベクトルに関して加法的であれば，追加した行列の行ベクトルは零ベクトルであり，2 つの零ベクトルの和は零ベクトルであるから，

$$\det_{n,k}(X)=\det_{n,k}(X)+\det_{n,k}(X)$$

も成り立たなければならない．これは $\det_{n,k}(X)$ が 0 でないことと矛盾する．また，この行列式が行ベクトルに関して斉次的ならば，追加した行列の行ベクトルに 0 を掛けても変わらないから，X の行列式の値は零にならなければならず，斉次性とも矛盾する．よって，行列式 $\det_{n,k}(X)$ は行ベクトルに関して n 重線形にはならない．

(ii) $\widetilde{\mathbf{1}}=\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i$ とする．$\tau\in S_n$ ならば，

$$U(\tau)\widetilde{\mathbf{1}}=U(\tau)\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^n U(\tau)\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_{\tau(i)}=\widetilde{\mathbf{1}}$$

となるので，$n\times(n-1)$ 行列 $X=(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-1})$ に対して，

$$\begin{aligned}\det_{n,n-1}(U(\tau)X)&=\det_n((U(\tau)X,\widetilde{\mathbf{1}}))=\det_n((U(\tau)X,U(\tau)\widetilde{\mathbf{1}}))\\&=\det_n(U(\tau)(X,\widetilde{\mathbf{1}}))=\det_n(U(\tau))\det_n((X,\widetilde{\mathbf{1}}))\\&=\operatorname{sgn}(\tau)\det_{n,n-1}(X).\end{aligned}$$

(iii) $n-k\geq 2$ の場合には，(i) で与えた行列 X と Y を使うと，$\det_{n,k}(X)=\det_k(Y)\neq 0$ となり，その値は零ではなく，$k+1$ 行目と $k+2$ 行目を入れ替えても値は変わらず，交代性は成り立たない． ■

この命題により，行列式 $\det_{n,k}(X)$ を行ベクトルに関する汎関数として見た場合，$k=n-1$ のときには交代性を満たすが，$k<n$ のそれ以外の場合は n 重線形性も交代性も満たさない．したがって，正方でない Cullis 行列式を計算するときには，列に関する基本変形は許されても，行に関する基本変形は許されない．この事実が，矩形行列の行列式を取り扱いだけでなく，実体をも見えにくくしている最大の要因と考えられる．そこで，第 3 章以降では，その事情を詳しく検討していくことにする．

行に関する基本変形

命題2.3.6において，Cullis 行列式の一般展開式を与えるために，定義1.4.14において，K から I への単射 σ に対して，単射の符号 $\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)$ という概念を導入した．このような単射の集合 S_k^I は，各 $\tau \in S_n$ に対して，

$$S_k^I = \{\tau \cdot \sigma \mid \sigma \in S_k^I\}$$

を満たしている．ここでは，K から I への単射に左から対称群 S_n の元を掛けたとき，どの単射の符号も交代性を満たすような S_n の元全体のなす部分群

$$\bigcap_{\sigma \in S_k^I} \{\tau \in S_n \mid \mathrm{sgn}_{n,k}(\tau \cdot \sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)\}$$

を考え，これを $G_{n,k}$ で表す．例えば，

$$G_{n,1} = \{\tau \in S_n \mid \forall\, i \in I : (-1)^{\tau(i)-i} = \mathrm{sgn}(\tau)\}, \quad G_{n,n-1} = S_n$$

となるが[6]，一般に，この集合がどのような形をしているのか，まだわかっていない．$X = (x_{i,j})$ のとき，$\tau \in G_{n,k}$ ならば，命題2.4.13の直前の議論により，$U(\tau)X = (x_{\tau^{-1}(i),j})$ となるから，命題2.3.6の一般展開により，

$$\begin{aligned}
\det{}_{n,k}(U(\tau)X) &= \sum_{\sigma \in S_k^I} \mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma) x_{\tau^{-1}(\sigma(1)),1} \cdots x_{\tau^{-1}(\sigma(k)),k} \\
&= \sum_{\sigma' \in S_k^I} \mathrm{sgn}_{n,k}(\tau \cdot \sigma') x_{\sigma'(1),1} \cdots x_{\sigma'(k),k} \\
&= \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma' \in S_k^I} \mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma') x_{\sigma'(1),1} \cdots x_{\sigma'(k),k} \\
&= \mathrm{sgn}(\tau) \det{}_{n,k}(X).
\end{aligned}$$

この式は

$$\det{}_{n,k}(U(\tau)X) = \det{}_n(U(\tau)) \det{}_{n,k}(X) \tag{2.9}$$

とも表せ，行列式の左乗法性を満たしている．

問題 52　$\sigma \in S_k^I$ かつ $\tau \in S_n$ とする．$\sigma(K)$, $\tau(\sigma(K))$ の元を小さい順に並べたも

6 $G_{3,1} = \{\mathrm{id}\}$, $G_{4,1} = \{\mathrm{id}, (1,3)(2,4), (1,2,3,4), (1,4,3,2)\}$, etc.

のをそれぞれ $i_1,\ldots,i_k$, $j_1,\ldots,j_k$ とすれば,

$$\mathrm{sgn}_{n,k}(\tau\cdot\sigma)=(-1)^{\sum_{\ell=1}^{k}(j_\ell-i_\ell)}\begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_k \\ \tau(i_1) & \ldots & \tau(i_k)\end{pmatrix}\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)$$

となることを示せ.

このような乗法性に関しては, 4.1 節でもう少し強い結果が示される. 例えば, この問題は系 4.1.5 の特別な場合になっている.

行ベクトルに関する幾何学的性質

行ベクトルに関しては芳しくない性質ばかりかというと, 必ずしもそうでない例を 2 つ挙げておく.

実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において, ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k\}$ に対して, $k-1$ 個のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_k,\ldots,\boldsymbol{x}_{k-1}-\boldsymbol{x}_k\}$ が 1 次独立のとき, 集合

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}_i\;\middle|\;(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\mathbb{R}^k,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1\right\}$$

を $k-1$ 次元**アフィン部分空間**という[7]. これは上の $k-1$ 個の 1 次独立なベクトル $\{\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_k,\ldots,\boldsymbol{x}_{k-1}-\boldsymbol{x}_k\}$ の張る $k-1$ 次元部分ベクトル空間を $\boldsymbol{x}_k$ だけ平行移動して得られる集合である. また, λ_i $(i=1,\ldots,k)$ の動く範囲を非負実数に制限して得られるその部分集合

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}_i\;\middle|\;(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in(\mathbb{R}_+)^k,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1\right\}$$

を $\boldsymbol{k-1}$ **単体**という. これは, 幾何学的には, $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ を頂点とし, その頂点どうしを互いに結んで得られる高次元の多面体で, その中身まで込めたものになっている.

例 2.4.14 3 個のベクトル $\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_0$ を頂点にもつ 2 単体は, 底辺の長さが 1 で高さが 1 の直角三角形であるから, その面積は 1/2 である. 4 個のベクトル $\boldsymbol{0},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ を頂点にもつ 3 単体は, 底面積が 1/2 で高さが 1 の三角錐で

---

[7] 集合 E に, つぎの 3 条件を満たす写像 $(\boldsymbol{x},\xi)\in\mathbb{R}^n\times E\mapsto\tau_{\boldsymbol{x}}\xi\in E$ が存在するとき, E をアフィン空間という. $\tau_{\boldsymbol{x}}(\tau_{\boldsymbol{y}}\xi)=\tau_{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}\xi$, $\tau_{\boldsymbol{0}}\xi=\xi$, 各 $\xi\in E$ に対して, 写像 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\mapsto\tau_{\boldsymbol{x}}\xi\in E$ は全単射.

あるから，その体積は $1/6 = 1/(2 \cdot 3)$ である．一般に，$n+1$ 個のベクトル $\mathbf{0}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を頂点にもつ n 単体

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1,\ x_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, n) \right\}$$

の体積は，重積分を用いてつぎのように

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dx_n \int_0^{1-x_n} dx_{n-1} \cdots \int_0^{1-x_n-\cdots-x_2} dx_1 \\
&= \int_0^1 dx_n \int_0^{1-x_n} dx_{n-1} \cdots \int_0^{1-x_n-\cdots-x_3} (1 - x_n - \cdots - x_2)\, dx_2 \\
&= \int_0^1 dx_n \int_0^{1-x_n} dx_{n-1} \cdots \int_0^{1-x_n-\cdots-x_4} \frac{1}{2}(1 - x_n - \cdots - x_3)^2\, dx_3 \\
&\ \ \vdots \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(n-1)\,!}(1 - x_n)^{n-1}\, dx_n = \left[-\frac{1}{n!}(1 - x_n)^n \right]_0^1 = \frac{1}{n\,!}
\end{aligned}$$

と求められるが，重積分に不慣れな場合には，結果だけを信用していただきたい．

つぎの命題では，上のような単体を双対空間 $(\mathbb{R}^{n-1})^*$ において考える．これは系 1.4.4 の拡張になっている．

命題 2.4.15　$n \times (n-1)$ 実行列 X の行列式の値は，行ベクトルの空間 $(\mathbb{R}^{n-1})^*$ において，行列 X の n 個の行ベクトルを座標にもつ n 個の点のなす $n-1$ 単体の符号付き体積の $(n-1)\,!$ 倍と一致する．

証明　系 1.4.12 により，$\det_{n,n-1}(X) = \det_n((X, \widetilde{\mathbf{1}}))$ が成り立つ．ただし，$\widetilde{\mathbf{1}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{e}_j$ である．$n \times (n-1)$ 行列 X の第 i 行を $\boldsymbol{x}^i$ とする．n 次正方行列 $(X, \widetilde{\mathbf{1}})$ の行列式の値は，行に関しても交代多重線形であるから，各 i 行 $(i \in \{1, \ldots, n-1\})$ から第 n 行を引くと，行列式の第 i 行は $(\boldsymbol{x}^i - \boldsymbol{x}^n, 0)$ となり，第 n 行はもとのまま $(\boldsymbol{x}^n, 1)$ である．この行列の第 n 列は n 番目の成分は 1 であるが，それ以外の成分はすべて 0 である．ゆえに，行列式 $\det_n((X, \widetilde{\mathbf{1}}))$ の値は第 i 行 $(i \in \{1, \ldots, n-1\})$ が $\boldsymbol{x}^i - \boldsymbol{x}^n$ の $n-1$ 次正方行列の行列式

の値となり，$n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^n$ の張る（つまり，原点とベクトル $\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^n$ を座標とする点を結ぶ $n-1$ 個の線分を辺とする）高次元の平行多面体の符号付き体積とも一致する．ゆえに，この値は，例 2.4.14 の計算により，n 個の点 $\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n$ を相互に結んで得られる $n-1$ 単体の符号付き体積の $(n-1)!$ 倍になっている． ■

通常，上の命題の符号は，X が $E_{I\setminus\{n\}}$ のときの $n-1$ 単体を基準に選んで，1 とし，符号が 1 か -1 かにより，それぞれ向きが正または負という．

系 2.4.16 $n\times(n-1)$ 行列 X の n 個の行ベクトルを上から $\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n$ とする．このとき，$\det_{n,n-1}(X)\neq 0$ であるための必要十分条件は行ベクトルの空間 $(\mathbb{R}^{n-1})^*$ において，集合 $\{\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^n \mid i=1,\ldots,n-1\}$ が 1 次独立なことである．

例 1.4.5 と例 1.4.8 で示した事柄は，つぎのように，一般の n 次元ベクトル空間においても成り立つ．

命題 2.4.17 $n\times(n-1)$ 行列 X の n 個の行ベクトルが，行ベクトルの空間 $(\mathbb{R}^{n-1})^*$ における，あるアフィン部分空間の元であるための必要十分条件は

$$\det{}_{n,n-1}(X)=0.$$

証明 十分性．$\widetilde{\mathbf{1}}=\sum_{j=1}^n \boldsymbol{e}_j$ とする．$\det_n((X,\widetilde{\mathbf{1}}))=\det_{n,n-1}(X)=0$ ならば，n 次正方行列 $(X,\widetilde{\mathbf{1}})$ の階数はたかだか $n-1$ である．$(X,\widetilde{\mathbf{1}})$ の行ベクトルを上から $\boldsymbol{y}^1=(\boldsymbol{x}^1,1),\ldots,\boldsymbol{y}^n=(\boldsymbol{x}^n,1)$ とする．$(\mathbb{R}^n)^*$ において，$\{\boldsymbol{y}^1,\ldots,\boldsymbol{y}^n\}$ の張る部分ベクトル空間における基底として，ある $c\subset I$ により決まる部分集合 $\{\boldsymbol{y}^i \mid i\in c\}$ を選ぶことができる．このとき，$m\in I\setminus c$ に対しては，$\boldsymbol{y}^m=\sum_{i\in c}\lambda_i\boldsymbol{y}^i$ と表せるが，このとき，この行ベクトルの n 番目の成分を見ると，$\sum_{i\in c}\lambda_i=1$ となるので，$\boldsymbol{y}^m$ は $\{\boldsymbol{y}^i \mid i\in c\}$ より決まるアフィン部分空間のベクトルである．ゆえに，$\boldsymbol{x}^m$ は $\{\boldsymbol{x}^i \mid i\in c\}$ により決まるアフィン部分空間のベクトルである．

必要性．行列 X の行ベクトルを上から $\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n$ とすれば，これらのベクトルがあるアフィン部分空間の元ならば，$\boldsymbol{x}^n=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\boldsymbol{x}^i$ かつ $\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i=1$

と仮定することができる．ゆえに，$\det_{n,n-1}(X) = \det_n((X, \widetilde{\mathbf{1}})) = 0$.　■

2.5　一般ラプラス展開

高次の行列の行列式を計算するとき，最もよく利用されるのがラプラス展開である．それだけでなく，ここで述べる一般ラプラス展開は，同一の次数をもつ部分正方行列の行列式を成分にもつ交代冪行列を論じる際には，なくてはならない存在でもある．4.1 節の議論で，このような交代冪行列が必要になるので，3.2 節でも，改めて論じ直すことにする．

2.5.1　各種ラプラス展開

後の準備のために，これまでと似た記号を新たに導入する．

$1 \leq k \leq \ell \leq n$ に対して，

$$I = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad L = \{1, 2, \ldots, \ell\}, \quad K = \{1, 2, \ldots, k\}$$

とする．ベクトル空間 $\mathbb{C}^\ell$ の規格直交基底を $\{\boldsymbol{e}_1^L, \ldots, \boldsymbol{e}_\ell^L\}$ とする．ここで，前に定義した $\mathbb{C}^k$ から $\mathbb{C}^n$ への等長写像 E_c と区別するために，$d \in \mathscr{C}_k^L$ に対して，$\mathbb{C}^k$ から $\mathbb{C}^\ell$ への等長写像で $\boldsymbol{e}_j^K \mapsto \boldsymbol{e}_{i_j}^L$ を満たすものを，肩に L を付けて E_d^L と表す．ただし，$i_1, i_2, \ldots, i_k$ は d の元を小さい順に並べたものである．

X を $n \times \ell$ 行列 $(x_{i,j})$ とする．$1 \leq k \leq \ell \leq n$ の場合には，$c \in \mathscr{C}_k^I$ の元を小さい順に並べた $i_1, \ldots, i_k$ と，$d \in \mathscr{C}_k^L$ の元を小さい順に並べた $j_1, \ldots, j_k$ を用いて，X の k 次**部分行列**

$$E_c^* X E_d^L = \begin{pmatrix} x_{i_1,j_1} & x_{i_1,j_2} & \cdots & x_{i_1,j_k} \\ x_{i_2,j_1} & x_{i_2,j_2} & \cdots & x_{i_2,j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i_k,j_1} & x_{i_k,j_2} & \cdots & x_{i_k,j_k} \end{pmatrix}$$

を作り，これを (c,d) 部分行列という．今後，部分行列に対して，このような記述を頻繁に使用する．

以後，しばらく行列式のさまざまな展開を紹介していく．正方行列の場合も含めて，ラプラス展開に関しては，つぎの一般ラプラス展開が最も一般的な展開式である．

定理 2.5.1 (一般ラプラス展開) $X \in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$ かつ $1 \leq k < \ell \leq n$ とする．各 $d \in \mathscr{C}_k^L$ に対して，

$$\begin{aligned}&\det{}_{n,\ell}(X)\\=&\operatorname{sgn}_L(d) \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \operatorname{sgn}_I(c) \det{}_k(E_c^* X E_d^L) \det{}_{n-k,\ell-k}(E_{I\setminus c}^* X E_{L\setminus d}^L).\end{aligned}$$

証明 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell)$ に対して，$d \in \mathscr{C}_k^L$ の元を小さい順に並べたものを $j_1, \ldots, j_k$ とし，$L \setminus d$ の元を小さい順に並べたものを $j_{k+1}, \ldots, j_\ell$ とすれば，命題 2.3.8 により，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,\ell}(X) &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1 & \cdots & \ell\\ j_1 & \cdots & j_\ell\end{pmatrix} \det{}_{n,\ell}((\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_\ell}))\\ &= \operatorname{sgn}_L(d) \det{}_{n,\ell}((\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_\ell})).\end{aligned}$$

ここで，$X_1 = (\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_k}) = X E_d^L$, $X_2 = (\boldsymbol{x}_{j_{k+1}}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_\ell}) = X E_{L\setminus d}^L$ とすれば，$(\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_\ell}) = (X_1, X_2)$．ゆえに，定理 2.4.10 のラプラス展開により，

$$\det{}_{n,\ell}((\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_\ell})) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \operatorname{sgn}_I(c) \det{}_k(E_c^* X_1) \det{}_{n-k,\ell-k}(E_{I\setminus c}^* X_2).$$

したがって，補題 2.4.3 により，行列式 $\det{}_{n,\ell}(X)$ の値は

$$\begin{aligned}&\operatorname{sgn}_L(d) \det{}_{n,\ell}((\boldsymbol{x}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j_\ell}))\\=&\operatorname{sgn}_L(d) \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \operatorname{sgn}_I(c) \det{}_k(E_c^* X_1) \det{}_{n-k,\ell-k}(E_{I\setminus c}^* X_2)\\=&\operatorname{sgn}_L(d) \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \operatorname{sgn}_I(c) \det{}_k(E_c^* X E_d^L) \det{}_{n-k,\ell-k}(E_{I\setminus c}^* X E_{L\setminus d}^L).\end{aligned}$$

■

第 j 列に関する展開

まず用語と記号の準備をする．$n \geq k$ のとき，$n \times k$ 行列 X に対して，$k \times n$ 行列 Y が $YX = 1_k$ を満たすとき，Y を X の**左逆行列**ということにする．X が正方行列の場合には，系 1.3.13 により，左逆行列は一意的に決まり，X の逆行列になるが，行列が正方でない場合には，一意的には決まらない．

つぎに，$n \times k$ 行列 $X = (x_{i,j})$ から第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1) \times (k-1)$ 部分行列を $X_{i,j}$ で表すことにする．これは $E^*_{I \setminus \{i\}} X E^K_{K \setminus \{j\}}$ とも表せる．同様に，$x_{i,j} = E^*_{\{i\}} X E^K_{\{j\}}$ と表せる．

系 2.5.2　$1 < k \leq n$ かつ $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ とする．

(i) 各 $j \in K$ に対して，

$$\det{}_{n,k}(X) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} x_{i,j} \det{}_{n-1,k-1}(X_{i,j}).$$

(ii) $\det{}_{n,k}(X) \neq 0$ のときには，

$$\frac{(-1)^{i+j} \det{}_{n-1,k-1}(X_{j,i})}{\det{}_{n,k}(X)}$$

を (i,j) 成分にもつ $k \times n$ 行列は X の左逆行列である．

証明　(i) $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ かつ $\boldsymbol{x}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \boldsymbol{e}_i$ とする．定理 2.5.1 において，L として K を選び，$c = \{i\}$，$d = \{j\}$ とすれば，$E^*_c X E^K_d = x_{i,j}$，$E^*_{I \setminus c} X E^K_{K \setminus d} = X_{i,j}$ となる．さらに，$\mathrm{sgn}_I(c) = (-1)^{i-1}$, $\mathrm{sgn}_L(d) = (-1)^{j-1}$ であるから，第 j 列に関する展開が得られる．

(ii) $(-1)^{i+j} \det{}_{n,k}(X)^{-1} \det_{n-1,k-1}(X_{j,i})$ を (i,j) 成分にもつ $k \times n$ 行列を $Y = (y_{i,j})$ とする．(i) の第 i 列に関する展開を使うと，

$$\det{}_{n,k}((\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{e}_\ell, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k)) = (-1)^{i+\ell} \det{}_{n-1,k-1}(X_{\ell,i})$$

と表せるので，$k \times k$ 行列 YX を $(z_{i,j})$ とすれば，

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^{n} y_{i,\ell} x_{\ell,j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{i+\ell} \det{}_{n,k}(X)^{-1} \det{}_{n-1,k-1}(X_{\ell,i}) x_{\ell,j} \end{aligned}$$

$$= \det{}_{n,k}(X)^{-1} \det{}_{n,k}((\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k))$$
$$= \delta_{i,j}.$$

よって，Y は X の左逆行列である． ■

X が $n \times k$ 矩形行列の場合にも，正方行列の場合との類似から，(i,j) 成分に $(-1)^{i+j} \det{}_{n-1,k-1}(X_{j,i})$ をもつ $k \times n$ 行列を，X の**左余因子行列**という．

註 7 この系で得られた X の左逆行列 Y は $YX = 1_k$ を満たしているが，X が矩形行列の場合には，正方行列の場合と違って，左逆行列としての一意性が保証されているわけではない．そこで，この系 2.5.2 の証明の中で得られた特別の Y は X の左余因子行列の各成分を，もとの行列式の値で割って規格化しているので，今後 X の**規格左余因子行列**と呼ぶことにする．

また $YX = 1_k$ を満たす Y に対して，積の順を入れ替えた XY は $(XY)^2 = X(YX)Y = X1_kY = XY$ を満たすから，$\mathbb{C}^n$ における冪等で，その像は X の像と一致している．

3.5 節へ行ってからわかるように，この系を用いると，最小ノルム型の反射的一般逆行列の存在や，未知数の個数より方程式の個数が多い場合の連立 1 次方程式の解の存在に関する議論をすることができる．

系 2.4.6 の結果は Cullis 自身によりつぎのように一般化されている．

系 2.5.3 $1 \leq k < n$ とする．$X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ に対して，

(i) **(Cullis)** $\widetilde{\mathbf{1}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i$ ならば，

$$\det{}_{n,k+1}((X, \widetilde{\mathbf{1}})) = \begin{cases} \det{}_{n,k}(X) & (n-k \text{ は奇数}) \\ 0 & (n-k \text{ は偶数}) \end{cases}.$$

(ii) $n-k$ が奇数のとき，行列 X の像がベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}$ を含めば，$\det{}_{n,k}(X) = 0$ となる．

証明 (i) k に関する数学的帰納法を使う．$k = 1$ の場合．$X = \boldsymbol{x} = (x_i)$ と

する．任意の n に対して，$\det_{n,1}(\widetilde{\mathbf{1}})$ の値は，系 2.4.6 により，n が奇数か偶数かにより，それぞれ 1 または 0 となる．このことを使って，行列式の第 1 列に関する展開をすると，再び系 2.4.6 により，

$$
\begin{aligned}
\det_{n,2}((\boldsymbol{x}, \widetilde{\mathbf{1}})) &= \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} x_\ell \det_{n-1,1}((\boldsymbol{x}, \widetilde{\mathbf{1}})_{\ell,1}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} x_\ell \det_{n-1,1}(\widetilde{\mathbf{1}}') \\
&= \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} x_\ell & (n-1 \text{ は奇数}) \\ 0 & (n-1 \text{ は偶数}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \det_{n,1}(X) & (n-1 \text{ は奇数}) \\ 0 & (n-1 \text{ は偶数}) \end{cases}.
\end{aligned}
$$

ただし，2 番目の等号の右辺の $\widetilde{\mathbf{1}}'$ は $\mathbb{C}^{n-1}$ における自然基底の和である．

つぎに，k に関して帰納的に議論するために，$k-1$ のときの式が成り立っているとする．いま，$n \times k$ 行列 $X = (x_{i,j})$ に対して，行列式 $\det_{n,k+1}((X, \widetilde{\mathbf{1}}))$ の第 1 列に関する展開を使うと，

$$
\begin{aligned}
\det_{n,k+1}((X, \widetilde{\mathbf{1}})) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{i,1} \det_{n-1,k}((X, \widetilde{\mathbf{1}})_{i,1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{i,1} \det_{n-1,k}((X_{i,1}, \widetilde{\mathbf{1}}')).
\end{aligned}
$$

この式の右辺に帰納法の仮定を使う．$(n-1)-(k-1) = n-k$ であることに注意すると，この式の右辺は

$$
\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_{i,1} \det_{n-1,k-1}(X_{i,1}) & (n-k \text{ は奇数}) \\ 0 & (n-k \text{ は偶数}) \end{cases}
$$

となる．$n-k$ が奇数の場合の式は，行列式 $\det_{n,k}(X)$ の第 1 列に関する展開式であるから，(i) の式が成り立ち，帰納法による証明が得られる．

(ii) 仮定により，行列 $(X, \widetilde{\mathbf{1}})$ の列ベクトルが 1 次従属であるから，その行列式の値は 0 である．したがって，$n-k$ が奇数の場合には，(i) により，$\det_{n,k}(X) = 0$ である．■

1.2 節の定理 1.3.15 において示したように，正方行列の場合には，行だけではなく，列に関してもラプラス展開をすることができる．つぎの定理では，変換 E_K の代わりに変換 E_d を用いて，行列の列または行に関して，添え字を 2 分する仕方をさらに一般化している[8]．

定理 2.5.4（ラプラス展開） $X \in M_n(\mathbb{C})$ かつ $1 \leq k < n$ とする．各 $d \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，

$$\begin{aligned}\det{}_n(X) &= \mathrm{sgn}_I(d) \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \mathrm{sgn}_I(c) \det{}_k(E_c^* X E_d) \det{}_{n-k}(E_{I\setminus c}^* X E_{I\setminus d}) \\ &= \mathrm{sgn}_I(d) \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \mathrm{sgn}_I(c) \det{}_k(E_d^* X E_c) \det{}_{n-k}(E_{I\setminus d}^* X E_{I\setminus c}).\end{aligned}$$

証明 一般ラプラス展開の定理 2.5.1 において，$\ell = n$ とすれば，最初の展開式が得られる．$\det{}_n(X^*) = \overline{\det{}_n(X)}$ となることに注意すれば，後の展開式も得られる． ■

2.5.2 矩形行列の交代冪行列

一般ラプラス展開の応用として，後に 4.1 節で，矩形行列式の左乗法性を論じる際に必要となる，新たな概念とそれを記述する用語を導入する．

X を $n \times k$ 行列とする．$1 \leq m \leq k \leq n$ の場合には，各 $(c, d) \in \mathscr{C}_m^I \times \mathscr{C}_m^K$ に対して，2.5.1 項で述べた m 次部分行列 $E_c^* X E_d^K$ の行列式の値を

$$\widetilde{X}_{c,d}^{(m)} = \det{}_m(E_c^* X E_d^K)$$

で表し，(c, d) 小行列式という．

この項では，行ベクトル，列ベクトルの添え字集合として，それぞれ，$\mathscr{C}_m^I$，$\mathscr{C}_m^K$ を用いるが，これまでの場合と違って，添え字集合の元の間に順番は付いていない．

定義 2.5.5 $n \times k$ 行列 X に対し，$(c, d) \in \mathscr{C}_m^I \times \mathscr{C}_m^K$ 成分に値 $\widetilde{X}_{c,d}^{(m)}$ をも

---
[8] [7] 参照.

つ $\binom{n}{m}\times\binom{k}{m}$ 行列を X の $\boldsymbol{m}$ **次交代冪行列**といい，$\widetilde{X}^{(m)}$ または $(\widetilde{X}^{(m)}_{c,d})$ で表す．

この厳めしい用語に馴染みにくさを感じるかもしれないが，第3章へ行って，この行列をグラスマン代数を使って見直してみると，自然な用語であることがわかる．この定義から直ちに，$\widetilde{aX}^{(m)}=a^m\widetilde{X}^{(m)}$ となるので，例えば $\widetilde{-X}^{(2)}=\widetilde{X}^{(2)}$ となることに注意しよう．

ここで，交代冪行列の積について考える．$n\ge \ell\ge k\ge m$ に対して，$N=\binom{n}{m}$, $N'=\binom{\ell}{m}$, $N''=\binom{k}{m}$ とおく．いま $n\times\ell$ 行列 X に対する m 次交代冪行列を

$$\widetilde{X}^{(m)}=(\widetilde{X}^{(m)}_{c,d})\quad((c,d)\in\mathscr{C}^I_m\times\mathscr{C}^L_m),$$

$\ell\times k$ 行列 Y に対する m 次交代冪行列を

$$\widetilde{Y}^{(m)}=(\widetilde{Y}^{(m)}_{d,e})\quad((d,e)\in\mathscr{C}^L_m\times\mathscr{C}^K_m)$$

とする．添え字の集合 $\mathscr{C}^I_m$, $\mathscr{C}^L_m$, $\mathscr{C}^K_m$ それぞれの元を適当に並べた

$$c_1,\dots,c_N,\quad d_1,\dots,d_{N'},\quad e_1,\dots,e_{N''}$$

を用いて，(i,j) 成分に $\widetilde{X}^{(m)}_{c_i,d_j}$ をもつ $N\times N'$ 行列 $(\widetilde{X}^{(m)}_{c_i,d_j})$ と，$\widetilde{Y}^{(m)}_{d_i,e_j}$ をもつ $N'\times N''$ 行列 $(\widetilde{Y}^{(m)}_{d_i,e_j})$ の積として得られる行列の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{N'}\widetilde{X}^{(m)}_{c_i,d_k}\widetilde{Y}^{(m)}_{d_k,e_j}=\sum_{d\in\mathscr{C}^L_m}\widetilde{X}^{(m)}_{c_i,d}\widetilde{Y}^{(m)}_{d,e_j}$$

で与えられる．この (i,j) 成分を，添え字集合 $\mathscr{C}^I_m$, $\mathscr{C}^K_m$ の元を用いて (c_i,e_j) 成分として読み替えると，m 次交代冪行列 $\widetilde{X}^{(m)}$ と $\widetilde{Y}^{(m)}$ の積の $(c,e)\in\mathscr{C}^I_m\times\mathscr{C}^K_m$ 成分は

$$\sum_{d\in\mathscr{C}^L_m}\widetilde{X}^{(m)}_{c,d}\widetilde{Y}^{(m)}_{d,e}$$

と表せる．この添え字の順番には無関係に定まる積を $\widetilde{X}^{(m)}\widetilde{Y}^{(m)}$ と表すことにする．実は，3.3節でこの積は XY の m 次交代冪行列として，$\widetilde{X}^{(m)}\widetilde{Y}^{(m)}=\widetilde{XY}^{(m)}$ と表せることがわかる．

同様に，$n\ge k\ge m$ の場合に，$n\times k$ 行列 X の m 次交代冪行列 $(\widetilde{X}^{(m)}_{c,d})$

に対し，$(d,c) \in \mathscr{C}_m^K \times \mathscr{C}_m^I$ 成分に

$$\overline{\widetilde{X}_{c,d}^{(m)}} = \overline{\det{}_m(E_c^* X E_d^K)} = \det{}_m((E_d^K)^* X^* E_c) = \widetilde{(X^*)}_{d,c}^{(m)}$$

をもつ m 次交代冪行列 $(\widetilde{(X^*)}_{d,c}^{(m)})$ を $(\widetilde{X}_{c,d}^{(m)})$ の随伴行列といい，$(\widetilde{X}^{(m)})^*$ で表す．つまり，$(\widetilde{X}^{(m)})^* = \widetilde{X^*}^{(m)}$ である．

また，n 次正方行列 T の場合には，m 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(m)}$ の行列式を考えることができる．実際，$\mathscr{C}_m^I$ の元を順に並べた

$$c_1, c_2, \ldots, c_N \quad (N = \binom{n}{m})$$

を用いて，(i,j) 成分に $\widetilde{T}_{c_i,c_j}^{(m)}$ をもつ行列 $\widetilde{T}^{(m)}$ の行列式の値は，$\mathscr{C}_m^I$ の元の並び方によらずに決まる．実際，$\widetilde{T}^{(m)}$ は正方行列と見なすことができ，しかも正方行列の行列式の値は直交座標系の選び方によらない．そこで，その値を m 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(m)}$ の行列式の値と定義することにする．この行列式は今後あまり使わないので，紛らわしいが，$N = \binom{n}{m}$ を用いて，$\det{}_N(\widetilde{T}^{(m)})$ と書くことにする．

例 2.5.6 4.1 節では，交代冪行列の各行の成分和が 1 になることを問題にする．そこで，ここでは，3 次正方行列 T から導かれる 2 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(2)}$ に対し，各行の成分和が 1 になる様子を見ておこう．$\mathscr{C}_2^I$ の元を

$$c_1 = \{1,2\}, \quad c_2 = \{1,3\}, \quad c_3 = \{2,3\}$$

とする．T から，第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる小行列を $T_{i,j}$ とすれば，

$$\widetilde{T}_{c_i,c_j}^{(2)} = \det{}_2(E_{c_i}^* T E_{c_j}) = \det{}_2(T_{4-i,4-j}).$$

この交代冪行列の第 i 行 $(i = 1,2,3)$ において，$\sum_{j=1}^3 \det{}_2(T_{4-i,4-j}) = 1$ が成り立つことは，$T = (t_{i,j})$ の成分を用いて，

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} \\ -1 & 1 & -1 \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

と表せる．そこで，行ベクトル $(1,-1,1)$ の直交補空間の直交基底 $\{\boldsymbol{t}^2, \boldsymbol{t}^3\}$ を

$\|\boldsymbol{t}^2\| = \|\boldsymbol{t}^3\| = 3^{-1/4}$ かつ $\{(1,-1,1), \boldsymbol{t}^2, \boldsymbol{t}^3\}$ が右手系になるように選び，行列 T の第2行と第3行をそれぞれ $\boldsymbol{t}^2, \boldsymbol{t}^3$ とすれば，上の行列式の値は1になる．つぎに，$\boldsymbol{t}^1 = \boldsymbol{t}^2 - \boldsymbol{t}^3$ とすれば，上の2番目と3番目の行列式の値も1となるので，$\boldsymbol{t}^i$ を第 i 行にもつ3次正方行列 T は，上の等式を満たすことがわかり，T の2次交代冪行列の各行の成分の総和は1になる．

一般ラプラス展開の定理2.5.1により，つぎのことが直ちにわかる．

定理 2.5.7　$1 \le k < \ell \le n$ かつ $X \in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$ とする．$\det{}_{n,\ell}(X) \neq 0$ のときには，各 $(c,d) \in \mathscr{C}_k^I \times \mathscr{C}_k^L$ に対して，

$$\frac{\mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_L(d)\det{}_{n-k,\ell-k}(E^*_{I\setminus c} X E^L_{L\setminus d})}{\det{}_{n,\ell}(X)}$$

を (d,c) 成分にもつ $\binom{\ell}{k} \times \binom{n}{k}$ 行列は k 次交代冪行列 $\widetilde{X}^{(k)} = (\widetilde{X}^{(k)}_{c,d})$ の規格左余因子行列である．

証明　(d,c) 成分が上の式で与えられる行列を $Y = (Y_{d,c})$ とする．このとき，$Y\widetilde{X}^{(k)}$ の (d',d) 成分は

$$\begin{aligned}
&\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \frac{\mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_L(d')}{\det{}_{n,\ell}(X)} \det{}_{n-k,\ell-k}(E^*_{I\setminus c} X E^L_{L\setminus d'}) \det{}_k(E^*_c X E^L_d) \\
=&\frac{\mathrm{sgn}_L(d')}{\det{}_{n,\ell}(X)} \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \mathrm{sgn}_I(c) \det{}_k(E^*_c X E^L_d) \det{}_{n-k,\ell-k}(E^*_{I\setminus c} X E^L_{L\setminus d'})
\end{aligned}$$

と表せる．したがって，$d' = d$ の場合には定理2.5.1により，右辺の値は1となり，$Y\widetilde{X}^{(k)}$ の対角の (d,d) 成分の値はすべて1になる．つぎに，$d \neq d'$ の場合には，d および d' の元を小さい順に並べたものを，それぞれ，$i_1, \ldots, i_k$ および $j_1, \ldots, j_k$ とする．$X = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\ell)$ に対して，$X' = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell)$ の列ベクトルを

$$\boldsymbol{b}_j = \begin{cases} \boldsymbol{a}_j & (j \in L \setminus d') \\ \boldsymbol{a}_{i_m} & (j = j_m \ (m = 1, \ldots, k)) \end{cases}$$

とおくと，$XE^L_d = X'E^L_{d'}$ かつ $XE^L_{L\setminus d'} = X'E^L_{L\setminus d'}$ となるので，

$$\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\operatorname{sgn}_I(c)\det{}_k(E_c^*XE_d^L)\det{}_{n-k,\ell-k}(E_{I\setminus c}^*XE_{L\setminus d'}^L)$$
$$=\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\operatorname{sgn}_I(c)\det{}_k(E_c^*X'E_{d'}^L)\det{}_{n-k,\ell-k}(E_{I\setminus c}^*X'E_{L\setminus d'}^L)$$

と表せる．したがって，定理 2.5.1 により，$Y\widetilde{X}^{(k)}$ の (d',d) 成分は

$$\frac{\det{}_{n,\ell}(X')}{\det{}_{n,\ell}(X)}$$

と表せる．$d\neq d'$ の場合には，$d\setminus d'\neq\emptyset$ であるから，行列 X' の列ベクトルの中には添え字を $d\cap(L\setminus d')$ にもつ列ベクトルが重複して現れる．したがって，$\det{}_{n,\ell}(X')=0$．よって，$d\neq d'$ の場合の $Y\widetilde{X}^{(k)}$ の非対角な (d',d) 成分の値は 0 となり，Y は $\widetilde{X}^{(k)}$ の規格左余因子行列である．■

最後に，定理 2.5.1 で与えた一般ラプラス展開を，正方行列の場合に，交代冪行列を用いて書き直すと，つぎの定理が得られる．

定理 2.5.8　T を n 次正方行列とし，$1\leq k<n$ とする．

(i) 各 $d\in\mathscr{C}_k^I$ に対して，

$$\det{}_n(T)=\operatorname{sgn}_I(d)\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\operatorname{sgn}_I(c)\,\widetilde{T}_{c,d}^{(k)}\,\widetilde{T}_{I\setminus c,\ I\setminus d}^{(n-k)}.$$

(ii) $\det{}_n(T)\neq 0$ のときには，

$$\frac{\operatorname{sgn}_I(c)\operatorname{sgn}_I(d)\widetilde{T}_{I\setminus c,\ I\setminus d}^{(n-k)}}{\det{}_n(T)}$$

を (d,c) 成分にもつ $\binom{n}{k}$ 次の正方行列は k 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(k)}=(\widetilde{T}_{c,d}^{(k)})$ の逆行列である．

(iii) $\det{}_n(T)=0$ ならば，各 $k=2,3,\ldots,n-1$ に対して，k 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(k)}$ の行列式の値も 0 である．

証明　(i) と (ii) は定理 2.5.7 の特別な場合であるから，(iii) だけを示せばよい．n 次正方行列を $T=(\boldsymbol{t}_1,\ldots,\boldsymbol{t}_n)$ とする．この行列の第 i 列 $\boldsymbol{t}_i$ が零ベクトルのときは，k 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(k)}=(\widetilde{T}_{d,c}^{(k)})$ において，$i\in c$ を満た

す第 c 列の成分はすべて 0 になるので，$\widetilde{T}^{(k)}$ の行列式の値は 0 になる．したがって，T の列ベクトルはどれも零ベクトルではない場合を考えればよい．そこで，$\det_n(T) = 0$ とする．このときは，$\sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{t}_j = \boldsymbol{0}$ を満たす，係数 $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ が存在する．このとき，$a_n \neq 0$ と仮定することができる．T の列ベクトルはどれも零ベクトルではないから，係数 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ の中にも 0 でないものが存在する．以下の議論では $a_1 \neq 0$ と仮定するが，a_1 を他の a_i $(i = 2, \ldots, n-1)$ に置き換えても同じように論じることができる．$c, d \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，$\widetilde{T}_{d,c}^{(k)} = \det_k(E_d^* T E_c)$ である．いま，$\ell = 1, 2, \ldots, n-k+1$ に対して，

$$c_\ell = \{\ell\} \cup (I \setminus \{1, 2, \ldots, n-k+1\}) \in \mathscr{C}_k^I$$

とすれば，任意の $d \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n-k+1} a_\ell \det_k(E_d^* T E_{c_\ell}) &= \sum_{\ell=1}^{n-k+1} a_\ell \det_k(E_d^*(\boldsymbol{t}_\ell, \boldsymbol{t}_{n-k+2}, \ldots, \boldsymbol{t}_n)) \\ &= \det_k\Big(E_d^*\Big(\sum_{\ell=1}^{n-k+1} a_\ell \boldsymbol{t}_\ell, \boldsymbol{t}_{n-k+2}, \ldots, \boldsymbol{t}_n\Big)\Big).\end{aligned}$$

この右辺の行列式の値が 0 になる．実際，$\sum_{\ell=1}^{n-k+1} a_\ell \boldsymbol{t}_\ell$ が零ベクトルでない場合には，$a_n \neq 0$ であるから，k 個からなるベクトルの集合

$$\Big\{\sum_{\ell=1}^{n-k+1} a_\ell \boldsymbol{t}_\ell, \boldsymbol{t}_{n-k+2}, \boldsymbol{t}_{n-k+3}, \ldots, \boldsymbol{t}_n\Big\}$$

は 1 次従属である．ゆえに，$\sum_{\ell=1}^{n-k+1} a_\ell \boldsymbol{t}_\ell$ が零ベクトルの場合も含めて，上の式の右辺の k 次行列式の値は 0 であることがわかる．さらに，$a_1 \neq 0$ と仮定してあるから，$(a_1, \ldots, a_{n-k+1}) \neq (0, \ldots, 0)$ となる．したがって，上の式の左辺を見ると，k 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(k)}$ の第 c_1 列，$\cdots$，第 c_{n-k+1} 列からなる $n-k+1$ 個の列ベクトルからなる集合は 1 次従属であることがわかる．よって，k 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(k)}$ の行列式の値も 0 になる．■

系 2.5.9　n 次正方行列 T に対して，$N = \binom{n}{k}$ とすれば，

$$\det_N(\widetilde{T}^{(k)}) \det_N(\widetilde{T}^{(n-k)}) = \det_n(T)^N.$$

とくに，$k=1$ または $k=n-1$ のときには，

$$\det{}_n(\widetilde{T}^{(n-1)}) = \det{}_n(T)^{n-1}.$$

証明 添え字集合 $\mathscr{C}_k^I$ の元を 1 列に並べて番号を付けたものを $c_1, \ldots, c_N$ とする．定理 2.5.8 の (ii) により，n 次正方行列 T が正則な場合には，N 次正方行列 $\widetilde{T}^{(k)}$ の (c_i, c_j) 成分を $\widetilde{T}^{(k)}_{c_i,c_j}$ とすると，その逆行列は，(c_i, c_j) 成分が

$$\frac{\mathrm{sgn}_I(c_i)\mathrm{sgn}_I(c_j)\widetilde{T}^{(n-k)}_{I\setminus c_j, I\setminus c_i}}{\det{}_n(T)}$$

により与えられる．ここで，N 次対角行列を

$$S = \mathrm{diag}(\mathrm{sgn}_I(c_1), \mathrm{sgn}_I(c_2), \ldots, \mathrm{sgn}_I(c_N))$$

とすれば，$\widetilde{T}^{(k)}$ の逆行列は，

$$\frac{1}{\det{}_n(T)} S\ {}^t(\widetilde{T}^{(n-k)}) S^*$$

と表せる．したがって，

$$\det{}_N(\widetilde{T}^{(k)}) \left(\frac{1}{\det{}_n(T)}\right)^N \det{}_N(S\ {}^t(\widetilde{T}^{(n-k)}) S^*) = 1.$$

ゆえに，$\det{}_N(\widetilde{T}^{(k)}) \det{}_N(\widetilde{T}^{(n-k)}) = \det{}_n(T)^N$．$T$ が正則でない場合には，定理 2.5.8 の (iii) により，求める式の両辺が 0 となり，やはり等号が成立する．

とくに，$k=1$ の場合には，$N=n$ かつ $\det{}_N(\widetilde{T}^{(1)}) = \det{}_n(T)$ となるので，上の結果から，$\det{}_n(T)\det{}_n(\widetilde{T}^{(n-1)}) = \det{}_n(T)^n$ となる．したがって，T が正則な場合には，$\det{}_n(\widetilde{T}^{(n-1)}) = \det{}_n(T)^{n-1}$．$T$ が正則でない場合にも，再び定理 2.5.8 の (iii) により，この式の両辺が 0 になり，やはり等号が成り立つ．

最後に，$k=n-1$ の場合は，$k=1$ の場合へ帰着される． ■

2.6 矩形行列式の右乗法性

正方行列の行列式の値は，行列の積に関して乗法的になっている．矩形行列の場合には，右からの正方行列の乗法に関しては乗法的であることがわか

るが，左からの乗法に関してはそのようなことは成り立たない．そこでここでは，右からの乗法についてだけ議論をし，左からの乗法に関しては改めて 4.1 節において論じることにする．また，右からの正方でない矩形行列の乗法に関しては，乗法性は成り立たないが，それを拡張した結果が成り立つので，その説明から始める．

2.6.1　行列式の右乗法性

2 つの矩形行列の積の行列式の値は，正方行列の場合と違って，それぞれの行列式の積になることはないが，そのような乗法性を自然に一般化した展開式が成り立つ．

定理 2.6.1　$1 \le k \le \ell \le n$ とする．各 $X \in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$ と $Y \in M_{\ell,k}(\mathbb{C})$ に対して，

$$\det{}_{n,k}(XY) = \sum_{d \in \mathscr{C}_k^L} \det{}_{n,k}(XE_d^L) \det{}_k((E_d^L)^* Y).$$

証明　$Y = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k)$ とすれば，$XY = (X\boldsymbol{y}_1, \ldots, X\boldsymbol{y}_k)$ となる．各 $\boldsymbol{y}_j$ は $\sum_{m=1}^{\ell} y_{m,j}\boldsymbol{e}_m^L$ と表せるので，$X\boldsymbol{y}_j = \sum_{m=1}^{\ell} y_{m,j}X\boldsymbol{e}_m^L$．ゆえに，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(XY) &= D_{n,k}(X\boldsymbol{y}_1, \ldots, X\boldsymbol{y}_k)\\ &= \sum_{m_1,\ldots,m_k=1}^{\ell} y_{m_1,1} \cdots y_{m_k,k} D_{n,k}(X\boldsymbol{e}_{m_1}^L, \ldots, X\boldsymbol{e}_{m_k}^L).\end{aligned}$$

ここで，$m_1, \ldots, m_k$ の中に同一の数が現れるときには，$D_{n,k}$ の値が 0 になるので，$m_1, \ldots, m_k$ がすべて異なる場合だけを考えればよい．したがって，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(XY) &= \sum_{d \in \mathscr{C}_k^L} \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_k=1 \\ \{m_1,\ldots,m_k\}=d}}^{\ell} y_{m_1,1} \cdots y_{m_k,k} D_{n,k}(X\boldsymbol{e}_{m_1}^L, \ldots, X\boldsymbol{e}_{m_k}^L)\\ &= \sum_{d \in \mathscr{C}_k^L} \sum_{\substack{\sigma \in S_k^L \\ \sigma(K)=d}} y_{\sigma(1),1} \cdots y_{\sigma(k),k} D_{n,k}(X\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}^L, \ldots, X\boldsymbol{e}_{\sigma(k)}^L).\end{aligned}$$

各 $d \in \mathscr{C}_k^L$ に対して，その元を小さい順に並べたものを $j_1, \ldots, j_k$ とすれば，右辺の最後の因子は

$$D_{n,k}(X\boldsymbol{e}^L_{\sigma(1)}, \ldots, X\boldsymbol{e}^L_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \end{pmatrix} \det{}_{n,k}(XE^L_d)$$

と表せ，しかも

$$\sum_{\substack{\sigma \in S^L_k \\ \sigma(K)=d}} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \end{pmatrix} y_{\sigma(1),1} \cdots y_{\sigma(k),k} = \det{}_k((E^L_d)^* Y)$$

が成り立つので，これら 2 つを組み合わせると求める展開式が得られる． ■

つぎの系 2.6.2 により，Cullis 行列式の値は，右からの正方行列の乗法に関しては右乗法性が成り立つことがわかる．したがって，行列式の計算に列に関する基本変形を用いることができる．

系 2.6.2（**右乗法性**） $1 \leq k \leq n$ とする．各 $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ と $Y \in M_k(\mathbb{C})$ に対して，

$$\det{}_{n,k}(XY) = \det{}_{n,k}(X) \det{}_k(Y).$$

証明 $\ell = k$ の場合には，$\mathscr{C}_k^L$ の元は K ただ 1 つであり，しかも上の定理 2.6.1 において，$E^L_K = 1_k$ となるから，求める式が得られる． ■

行列 X の極分解を $V|X|$ とすると，行列式の右乗法性により

$$\det{}_{n,k}(X) = \det{}_{n,k}(V) \det{}_k(|X|)$$

となるので，行列式 $\det{}_{n,k}(X)$ の計算は，絶対値 $|X|$ の行列式 $\det{}_k(|X|)$ と，半等長変換 V の行列式 $\det_{n,k}(V)$ の計算に分けられる．したがって，矩形行列の行列式の意味の解明は，この半等長変換の行列式の意味の解明に帰着される．X が退化している場合には，V が等長ではなく，$\det{}_{n,k}(V) = 0$ となるので，$\det{}_{n,k}(X) = 0$ が成り立つ．しかし，X が非退化な場合には，V は $\mathbb{C}^k$ から $\mathbb{C}^n$ への等長変換になるので，このような変換の行列式の意味を明らかにすることが必要になる．

2.6.2 $n \times (n-1)$ 等長行列式の意味

$n \times (n-1)$ 等長行列の Cullis 行列式に関しては，系 2.4.6（系 1.4.12）を使うと，つぎのような幾何学的解釈が得られる．

命題 2.6.3 $n \times (n-1)$ 等長行列 $V = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1})$ に対し，P を $n-1$ 次元部分ベクトル空間 $\{\widetilde{\mathbf{1}}\}^{\perp}$ への射影行列とすると，

(i) $|\det_{n,n-1}(V)|^2 = n \det{}_{n-1}(V^* P V)$.

(ii) 実ベクトル空間の場合には，$|\det_{n,n-1}(V)|$ の値は $\{P\boldsymbol{v}_1, \ldots, P\boldsymbol{v}_{n-1}\}$ を辺にもつ $n-1$ 次元平行多面体の体積の $\sqrt{n}$ 倍である．

証明 (i) 単位ベクトル $(1/\sqrt{n})\widetilde{\mathbf{1}}$ を $\boldsymbol{b}$ とする．Cullis 行列式の列ベクトルに関する交代多重線形性により，

$$
\begin{aligned}
\det{}_{n,n-1}(V) &= \det{}_n((V, \widetilde{\mathbf{1}})) = \det{}_n((\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \widetilde{\mathbf{1}})) \\
&= \det{}_n((\boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{b}|\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1} - (\boldsymbol{b}|\boldsymbol{v}_{n-1})\boldsymbol{b}, \widetilde{\mathbf{1}})) \\
&= \det{}_n((P\boldsymbol{v}_1, \ldots, P\boldsymbol{v}_{n-1}, \widetilde{\mathbf{1}})) = \det{}_n((PV, \widetilde{\mathbf{1}}))
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$\{P\boldsymbol{v}_1, \ldots, P\boldsymbol{v}_{n-1}\}$ のグラム–シュミットの直交化 $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-1}\}$ を用いて，$W = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-1})$ かつ $U = (W, \boldsymbol{b})$ とすると，W は $\mathbb{C}^{n-1}$ から $\mathbb{C}^n$ への等長行列で，U はユニタリ行列である．したがって，

$$
\begin{aligned}
\det{}_n((PV, \widetilde{\mathbf{1}})) &= \det{}_n(U) \det{}_n(U^*(PV, \widetilde{\mathbf{1}})) \\
&= \sqrt{n} \det{}_n(U) \det{}_{n-1}(W^* P V).
\end{aligned}
$$

他方，問題 5 により，

$$
\det{}_n((PV, \widetilde{\mathbf{1}})) = \det{}_n(U) \times (\text{非負定数})
$$

となることがわかるので，$\det_{n-1}(W^* P V)$ は非負である．したがって，

$$
\det{}_{n-1}(W^* P V) = \det{}_{n-1}(V^* P V)^{1/2}.
$$

ここで，$|\det{}_n(U)| = 1$ となることを使えば，(i) の主張がわかる．

(ii) (i) の議論を実ベクトル空間の場合に制限すると，W は $\mathbb{R}^{n-1}$ から $\mathbb{R}^n$ への等長行列で，その像は $P\mathbb{R}^n$ であるから，$\det{}_{n-1}(W^*PV)$ の値は $\{P\boldsymbol{v}_1, \ldots, P\boldsymbol{v}_{n-1}\}$ を辺にもつ $n-1$ 次元平行多面体の体積と一致している．よって，(ii) もわかる． ■

n 次ユニタリ行列全体を $U(n)$ で表す．その部分集合 $\{U \in U(n) \,|\, \det{}_n(U) = 1\}$ を $SU(n)$ で表すことにする．

命題 2.6.4 $n \times (n-1)$ 等長行列 $V = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1})$ に対し，

(i) $\boldsymbol{b}$ を $(V, \boldsymbol{b}) \in SU(n)$ となるような単位ベクトルとすると，

$$\det{}_{n,n-1}(V) = (\boldsymbol{b}|\widetilde{\mathbf{1}}). \tag{2.10}$$

(ii) 実ベクトル空間の場合には，$(V, \boldsymbol{b}) \in SO(n)$ とすれば，(2.10) が成り立つ．

証明 まず，$b_j = \mathrm{sgn}(I \setminus \{j\})\overline{\det{}_{n-1}(E^*_{I\setminus\{j\}}V)}$ とする．ここで，$\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^n b_j \boldsymbol{e}_j$ とすれば，

$$(\boldsymbol{b}|\widetilde{\mathbf{1}}) = \sum_{j=1}^n (\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^n \mathrm{sgn}(I \setminus \{j\}) \det{}_{n-1}(E^*_{I\setminus\{j\}}V) = \det{}_{n,n-1}(V).$$

問題 31 により，$(V, \boldsymbol{b}) \in SU(n)$ を満たす $\boldsymbol{b}$ は一意的に定まるので，以下では $(V, \boldsymbol{b}) \in SU(n)$ を示せばよいことになる．まず，行列 V の各列ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ は

$$(\boldsymbol{v}_i|\boldsymbol{b}) = \sum_{j=1}^n b_j(\boldsymbol{v}_i|\boldsymbol{e}_j) = \det{}_n((V, \boldsymbol{v}_i)) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

を満たすので，集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{b}\}$ は直交基底である．つぎに，$(V, \boldsymbol{b})$ の行列式を，$\mathrm{sgn}_I(I \setminus \{j\}) = (-1)^{n-1}$ に留意して，第 n 列に関して展開すると，

$$\det{}_n((V, \boldsymbol{b})) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} b_j \det{}_{n-1}(E^*_{I\setminus\{j\}}V) = \sum_{j=1}^n |b_j|^2 = \|\boldsymbol{b}\|^2$$

なので，$(V, \|\boldsymbol{b}\|^{-1}\boldsymbol{b}) \in SU(n)$ となる．しかも，その行列式の値は1であるから，$\|\boldsymbol{b}\| = 1$ となる．よって，$(V, \boldsymbol{b}) \in SU(n)$. ■

この命題では，$n-1$ 次元部分ベクトル空間 $V\mathbb{R}^n$ において規格直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}\}$ をこの順で正の向きとしたときの，$V\mathbb{R}^n$ に対する単位正規ベクトルが $\boldsymbol{b}$ ということである．つぎの第3章の3.4節へ行ってから，これらの点を詳しく検討することにしよう．

第3章　Cullis行列式の幾何学的解釈と一般逆行列

Cullis 行列式には，正方行列の行列式に対して 1.3.2 項の最後で説明した幾何学的解釈の他に，ある種の指向性（向きと大きさ）が備わっており，この性質が行列式の性格をわかりにくくさせている．そこで，その様子を詳しく知るために，Cullis 行列式を，正方行列の場合と同じように，グラスマン代数を用いて書き直すことにする．例えば，正方行列の行列式の場合には，ラプラス展開などが，グラスマン代数のある自然な規格直交基底に関する直交展開になっていることが知られているが [7]，Cullis 行列式の場合にも同じようなことが成り立つ．それだけではなく，グラスマン代数上には，自然な対称性を記述するホッジ作用素が存在し，矩形行列に関する一般論を展開する際には，代数構造とこの作用素とがきわめて有効に機能することがわかる．ここでは，矩形行列の行列式として，Cullis 行列式の他に，余 Cullis 行列式という行列式を導入する．この行列式は必ずしも自然な対象とは考えにくいが，一般論の中では Cullis 行列式の双対対象としての位置を占めている．そこで，この章の前半はグラスマン代数の解説から始める．

後半では，前半の結果を用いて，Cullis 行列式の指向性について詳しく検討する．その結果，正方行列の行列式の値を決める，行列式の値の絶対値（列ベクトルの張る平行多面体の体積）とその値の符号に相当するものが，矩形行列の行列式の場合には，行列の絶対値が正定値正方行列になるので，その行列式の値（行列の絶対値の列ベクトルの張る平行多面体の体積）と符号と重みの 3 つからなることがわかる．しかも，符号と重みの対はグラスマン代数のある部分ベクトル空間の中の特別な球面である「指向性球面」上に実現され，きれいな対称性をもっていることが判明する．ただし，矩形行列が非退化であっても，重みが 0 の場合には行列式の値も 0 になっている．

まだ，Cullis 行列式について十分な解明がなされたわけではないが，ここでの結果は，一般逆行列の議論にも一部応用できるので，最後の節では一般逆行列の解説をしてから，各種の一般逆行列の存在に関する議論を行う．

3.1　グラスマン代数

グラスマン代数は，n 次元ベクトル空間の中の k 次元単体のもつ幾何学的性質を論じるために，19 世紀の中頃に H.G. グラスマンにより導入された概念で，例 3.2.10 で触れる 3 次元ベクトル解析において使われる外積の概念をヒントにして，高次元化したものと見るのが自然である．とくに，今後の行列式の議論においては，単なるベクトル空間の構造だけでなく，グラスマン代数の積演算を込めた代数構造が利用できることが重要である．しかも，グラスマン代数における外積は，ベクトル解析の外積と違って，結合法則を満たしているので扱いやすい．これらのお陰で，この概念は，射影空間やカルタンによる微分形式の議論，場の量子論におけるフェルミ粒子の生成・消滅の記述など，広く利用されている．

グラスマン代数は，通常，ベクトル空間に（楔積とも呼ばれる）外積を与えて定義されるが，ここでは少し違った手順で定義をする．すでに，定理 2.1.15 で説明したように，ベクトル空間が有限次元の場合には，基底を 1 つ指定すると，その各ベクトルを直交軸とする直交座標系が定まり，自然に内積を定義することができた．そこで，今後の議論が進めやすいように，最初から内積空間を用いて定義をする．もちろん，基底を変えた場合には，適当な正則行列を用いて相互に読み替えることが可能である．その準備として，内積空間のテンソル積の説明から始めるが，テンソル積の定義だけならば，同じ理由により，内積は必要ない．

3.1.1　ベクトル空間のテンソル積

複数のベクトル空間から，新たなベクトル空間を作る方法として，2.1.7 項で説明した直和の他に，これから説明するテンソル積が知られている．ここ

では，2 つのベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{C}^m$ のテンソル積の説明だけを行うが，ベクトル空間の個数がもっと多い場合にも同じように議論することができるので，一般の場合は省くことにする．

2.1 節の例 2.1.3 で説明したように，空でない集合上の関数の全体は各点ごとの和と定数倍により，ベクトル空間になる．この視点に立つと，n 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ は，n 点集合 $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ の点 i において，ベクトルの第 i 成分を値にもつ関数全体がなすベクトル空間 $\mathscr{F}(I_n)$ と同一視することができる．つまり，$\mathbb{C}^n = \mathscr{F}(I_n)$ である．$I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ の場合には，$\mathbb{C}^m = \mathscr{F}(I_m)$ である．そこで，それぞれの空間の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ と $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{C}^m$ に対して[1]，直積集合

$$D = I_n \times I_m = \{(i, j) \mid i \in I_n,\ j \in I_m\}$$

上の関数を

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(i, j) = x_i y_j, \quad (i, j) \in D$$

で定義すれば，$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ はベクトル空間 $\mathscr{F}(D)$ の元である．このとき，集合 $\{f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m\}$ の生成する，$\mathscr{F}(D)$ の部分ベクトル空間を，ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ とベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ の**テンソル積**といい，$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ で表すことにする．これはベクトル空間 $\mathscr{F}(D)$ と一致していることが，補題 3.1.2 で示される．さらに，関数 $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**テンソル積**といい，$\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$ で表す．したがって，

$$(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})(i, j) = x_i y_j, \quad (i, j) \in D$$

と表せる．つまり，集合 $\{\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m\}$ の張るベクトル空間が $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ である．

補題 3.1.1 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^m$ と任意の定数 $a \in \mathbb{C}$ に対して，

(i) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \otimes \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{z}$.

---

[1] 横ベクトルの左上に付けた小さな t は 1.2.1 項で説明した転置記号である．つまり，横ベクトルを縦に並べ替えた縦ベクトルを表している．

(ii) $\boldsymbol{x} \otimes (\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z} + \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{w}$.

(iii) $(a\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \otimes (a\boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z})$.

証明　$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$, $\boldsymbol{z} = {}^t(z_1, \ldots, z_m)$ とすれば,

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = {}^t(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

であるから,

$$\begin{aligned}((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \otimes \boldsymbol{z})(i, j) &= (x_i + y_i)z_j = x_i z_j + y_i z_j \\ &= (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z})(i, j) + (\boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{z})(i, j) = (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \otimes \boldsymbol{z})(i, j)\end{aligned}$$

となる．したがって，(i) が成り立つ．(ii) の証明も同様である．

また，$a\boldsymbol{x} = {}^t(ax_1, \ldots, ax_n)$, $a\boldsymbol{z} = {}^t(az_1, \ldots, az_m)$ であるから,

$$\begin{aligned}((a\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{z})(i, j) &= (ax_i)z_j = a(x_i z_j) = a(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z})(i, j), \\ (\boldsymbol{x} \otimes (a\boldsymbol{z}))(i, j) &= x_i(az_j) = a(x_i z_j) = a(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z})(i, j)\end{aligned}$$

となる．したがって，(iii) が成り立つ．■

補題の条件 (iii) により，その式から括弧を省いても問題は生じないので，$a\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z}$ と表すことが多い．また，この補題の条件 (i), (ii), (iii) により，テンソル積により決まる写像

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \longmapsto \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$$

は双線形である．

補題 3.1.2　m 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ の自然基底を $\{\boldsymbol{e}'_j \mid j \in I_m\}$ とする．このとき,

(i) 集合 $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j \mid (i, j) \in I_n \times I_m\}$ はベクトル空間 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ の基底である．

(ii) $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m = \mathscr{F}(D)$.

証明　(i) $D = I_n \times I_m$ とする．ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ と $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m$ それぞれの第

i 成分と第 j 成分を x_i, z_j とすれば，補題 3.1.1 により，

$$\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z} = \sum_{(i,j)\in D} x_i z_j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j$$

と表せるので，集合 $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j \mid (i,j) \in D\}$ がベクトル空間 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ を張ることがわかる．つぎに，この集合の 1 次独立性を示すために，$\sum_{(i,j)\in D} c_{i,j} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j = \boldsymbol{0}$ とする．この式の左辺は集合 D 上で恒等的に 0 の関数である．その任意の点 $(k,\ell) \in D$ において，

$$\begin{aligned}\Bigl(\sum_{(i,j)\in D} c_{i,j} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j\Bigr)(k,\ell) &= \sum_{(i,j)\in D} c_{i,j} (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j)(k,\ell) \\ &= \sum_{(i,j)\in D} c_{i,j} \delta_{i,k} \delta_{j,\ell} = c_{k,\ell}\end{aligned}$$

となるから，すべての係数が $c_{k,\ell} = 0$ となり，集合 $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j \mid (i,j) \in D\}$ は 1 次独立である．よって，この集合は $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ の基底である．

(ii) テンソル積の定義により，$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \subset \mathscr{F}(D)$．他方，$\boldsymbol{e}_i(j) = \delta_{i,j}$ かつ $\boldsymbol{e}'_i(j) = \delta_{i,j}$ であるから，(i) により，$\mathscr{F}(D)$ の元 f は $\sum_{(i,j)\in D} f(i,j) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j$ と表せる．したがって，逆の包含関係もわかり，$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m = \mathscr{F}(D)$． ■

ベクトル空間 $\mathscr{F}(D)$ の添え字の集合 $D = I_n \times I_m$ の元の個数は nm であるから，$\mathscr{F}(D)$ を nm 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^{nm}$ と見なすことにより，$\mathscr{F}(D)$ において自然な内積を考えることができる．

命題 3.1.3 ベクトル空間 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ における自然な内積は

$$\Bigl(\sum_{i=1}^{n'} a_i \boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_i \Bigm| \sum_{j=1}^{m'} b_j \boldsymbol{u}_j \otimes \boldsymbol{v}_j\Bigr) = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{m'} \overline{a_i} b_j (\boldsymbol{x}_i | \boldsymbol{u}_j)(\boldsymbol{y}_i | \boldsymbol{v}_j)$$

を満たす．補題 3.1.2 の基底はこの内積に関する規格直交基底である．

証明 $\mathbb{C}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}_j$, $\boldsymbol{u}_j$ の第 i 成分をそれぞれ $x_{i,j}, u_{i,j}$, $\mathbb{C}^m$ のベクトル $\boldsymbol{y}_j$, $\boldsymbol{v}_j$ の第 i 成分をそれぞれ $y_{i,j}, v_{i,j}$ とする．ベクトル $\sum_{i=1}^{n'} a_i \boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_i$ を $D = I_n \times I_m$ 上の関数と見たときに，点 $(k,\ell) \in D$ においてとる値は

$$\Bigl(\sum_{i=1}^{n'} a_i \boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_i\Bigr)(k,\ell) = \sum_{i=1}^{n'} (a_i \boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_i)(k,\ell) = \sum_{i=1}^{n'} a_i x_{k,i} y_{\ell,i}$$

である．同様に，ベクトル $\sum_{j=1}^{m'} b_j \boldsymbol{u}_j \otimes \boldsymbol{v}_j$ が点 $(k,\ell) \in D$ においてとる値は

$$\Big(\sum_{j=1}^{m'} b_j \boldsymbol{u}_j \otimes \boldsymbol{v}_j\Big)(k,\ell) = \sum_{j=1}^{m'} b_j u_{k,j} v_{\ell,j}$$

である．ゆえに，自然な内積は

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{n'} a_i \boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_i \Big| \sum_{j=1}^{m'} b_j \boldsymbol{u}_j \otimes \boldsymbol{v}_j\Big) &= \sum_{(k,\ell)\in D} \overline{\sum_{i=1}^{n'} a_i x_{k,i} y_{\ell,i}} \sum_{j=1}^{m'} b_j u_{k,j} v_{\ell,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{m'} \overline{a_i} b_j (\boldsymbol{x}_i | \boldsymbol{u}_j)(\boldsymbol{y}_i | \boldsymbol{v}_j)\end{aligned}$$

により与えられる．また，この内積に関して，

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j | \boldsymbol{e}_{i'} \otimes \boldsymbol{e}'_{j'}) = (\boldsymbol{e}_i | \boldsymbol{e}_{i'})(\boldsymbol{e}'_j | \boldsymbol{e}'_{j'}) = \delta_{(i,j),(i',j')}$$

となるから，集合 $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j \mid (i,j) \in D\}$ は内積空間 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ における，規格直交基底である．■

つぎに，k 重線形汎関数に関する記述が，k 重テンソル積上の線形汎関数に関する記述へ，自然に書き換えられることを示す．$k=2$ の場合だけを示す．

命題 3.1.4　直積集合 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ 上の双線形汎関数全体のなす集合を $\mathscr{F}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m)$ とする．このとき，双線形変換

$$\beta : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \longmapsto \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$$

を用いて得られる線形写像

$$f \in (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)^* \longmapsto f \circ \beta \in \mathscr{F}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m)$$

は全単射である．

証明　命題 2.2.10 で述べたように，集合 $\mathscr{F}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m)$ は，各点ごとの和と定数倍の演算でベクトル空間になる．しかも，$D = I_n \times I_m$ とすると，直積集合 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ 上で

$$f_{i,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{e}_i | \boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}'_j | \boldsymbol{y}) \quad ((i,j) \in D,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m)$$

を満たす双線形汎関数 $f_{i,j}$ は命題 3.1.3 により,

$$f_{i,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j | \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m)$$

と表せる．他方，双線形汎関数 $g \in \mathscr{F}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m)$ は

$$g = \sum_{(i,j)\in D} c_{i,j} f_{i,j} \quad (c_{i,j} = g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'_j))$$

と表せるので,

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{(i,j)\in D} c_{i,j} f_{i,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Big(\sum_{(i,j)\in D} c_{i,j} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j \Big| \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} \Big).$$

ここで，ベクトル $\sum_{(i,j)\in D} c_{i,j} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}'_j$ の定める $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ の線形汎関数を f とすれば，右辺は $f(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})$ となるので，$g = f \circ \beta$ と表せる．$g = 0$ のときには，係数 $c_{i,j}$ はすべて 0 であるから，f も 0 となる．よって，線形変換

$$f \in (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)^* \longmapsto f \circ \beta \in \mathscr{F}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m) \tag{3.1}$$

は全射である．また，$f \circ \beta = 0$ ならば，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ と $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m$ に対して，$f(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) = 0$ となるので，$f = 0$ となり，上の写像は単射である． ■

最後に，命題 3.1.4 の双線形汎関数に関する記述を，双線形変換に関する記述へ拡張しておく．この結果は，つぎの 3.1.2 項以降の議論でも必要になるが，テンソル積間の同等性を示す際にも利用され，テンソル積に関する基本定理の 1 つである．

定理 3.1.5 ベクトル空間の直積集合 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ から有限次元内積空間 $\mathscr{V}$ への双線形変換全体のなす集合を $\mathscr{F}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, \mathscr{V})$ とする．このとき，双線形変換

$$\beta : (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \longmapsto \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$$

を用いて得られる線形写像

$$F \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m, \mathscr{V}) \longmapsto F \circ \beta \in \mathscr{F}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, \mathscr{V}) \tag{3.2}$$

は全単射である．

証明　命題 3.1.4 の結果を用いて，(3.2) の写像は全単射であることを示す．F が零でない場合を考えればよい．$\mathscr{V}$ の規格直交基底を $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell\}$ とする．このとき，像 $F(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$ は $\mathscr{V}$ の部分ベクトル空間であるから，この基底に関する i 番目の成分を $f_i(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{b}_i | F(\boldsymbol{z}))$ $(\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$ とすれば，

$$F = \sum_{i=1}^{\ell} f_i \boldsymbol{b}_i, \quad F \circ \beta = \sum_{i=1}^{\ell} (f_i \circ \beta) \boldsymbol{b}_i$$

と表せる．各成分の間の写像

$$f_i \in (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)^* \longmapsto f_i \circ \beta \in \mathscr{F}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m)$$

は，命題 3.1.4 により，全単射である．したがって，これらの写像の和

$$\sum_{i=1}^{\ell} f_i \boldsymbol{b}_i \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m, \mathscr{V}) \longmapsto \sum_{i=1}^{\ell} (f_i \circ \beta) \boldsymbol{b}_i \in \mathscr{F}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, \mathscr{V})$$

として得られる写像 $F \mapsto F \circ \beta$ も全単射である．■

3.1.2　テンソル積ベクトルの交代化

この項では，定理 3.1.5 の結果を受けて，多重線形写像の交代性を，ベクトルのテンソル積の交代性へ書き換えることを考えよう．その結果，3.1.4 項へ行ってから，グラスマン代数という概念に自然に到達することがわかるだろう．

k 個の同一なベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ のテンソル積 $\mathbb{C}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^n$ を **k 重テンソル積**といい，$(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ で表す．他方，ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ は，その元 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ を，$I (= I_n)$ 上の（1 変数）関数

$$\boldsymbol{x} : i \in I \longmapsto x_i \in \mathbb{C}$$

と見なすことにより，I 上の関数全体のなす集合 $\mathscr{F}(I)$ を用いて，$\mathbb{C}^n = \mathscr{F}(I)$ と表せた．したがって，k 個のベクトル $\boldsymbol{x}_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} \boldsymbol{e}_i$ $(j = 1, \ldots, k)$ のテンソル積 $\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k$ を，直積集合 I^k 上の k 変数関数

$$\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k : (i_1, \ldots, i_k) \in I^k \longmapsto x_{i_1,1} \cdots x_{i_k,k} \in \mathbb{C}$$

と見なすことにより，I^k 上の関数全体のなす集合 $\mathscr{F}(I^k)$ を用いて，$(\mathbb{C}^n)^{\otimes k} = \mathscr{F}(I^k)$ と表せる．この k 変数関数の値は，積の順番を入れ替えても変わらないから，k 次対称群 S_k の任意の元 σ に対して，

$$x_{i_1,1}\cdots x_{i_k,k} = x_{i_{\sigma(1)},\sigma(1)}\cdots x_{i_{\sigma(k)},\sigma(k)},$$
$$(\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_k)(i_1,\ldots,i_k) = (\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_{\sigma(k)})(i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)})$$

を満たしている．ここで，後の記述の便宜上，I^k の座標を並べ替える I^k 上の変換

$$T_\sigma(i_1,\ldots,i_k) = (i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}) \tag{3.3}$$

を導入し，これを用いると，積の順番を入れ替える上の式は

$$(\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_k)(T_\sigma\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(k)})(\boldsymbol{i}) \tag{3.4}$$

と表せる．

k 重テンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ の元 $\boldsymbol{z}$ の中でも，定義 2.3.1 の交代性，つまり任意の $\sigma\in S_k$ に対して，

$$\boldsymbol{z}(T_\sigma\boldsymbol{i}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\boldsymbol{z}(\boldsymbol{i}) \tag{3.5}$$

を満たすものを考えよう．

補題 3.1.6 k 重テンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ の元 $\boldsymbol{y}$ に対して，

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{i}) = \sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\boldsymbol{y}(T_\sigma\boldsymbol{i}) \tag{3.6}$$

とすれば，

(i) $\boldsymbol{z}$ は (3.5) 式の交代性を満たす．

(ii) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_k$ の場合には，

$$\boldsymbol{z} = \sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_{\sigma(k)}). \tag{3.7}$$

証明 (i) 集合 $\{\sigma'\cdot\sigma \mid \sigma'\in S_k\}$ は対称群 S_k と一致するから，

$$\boldsymbol{z}(T_\sigma\boldsymbol{i}) = \sum_{\sigma'\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma')\boldsymbol{y}(T_{\sigma'\cdot\sigma}\boldsymbol{i}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{\sigma'\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma'\cdot\sigma)\boldsymbol{y}(T_{\sigma'\cdot\sigma}\boldsymbol{i})$$

$$= \mathrm{sgn}(\sigma)\boldsymbol{z}(\boldsymbol{i}).$$

(ii) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k$ の場合には，(3.6) 式の右辺に (3.4) 式を使うと，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{i}) &= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k)(T_\sigma \boldsymbol{i}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)(\boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(k)})(\boldsymbol{i}).\end{aligned}$$

さらに，$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ と $\{\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_k\} = S_k$ を使うと，

$$\boldsymbol{z} = \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(k)}). \qquad \blacksquare$$

この補題で，ベクトル $\boldsymbol{y}$ から新たに得られたベクトル $\boldsymbol{z}$ を，$\boldsymbol{y}$ の**交代化**または $\boldsymbol{y}$ を交代化して得られたベクトルという．とくに，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k$ の交代化に $1/\sqrt{k\,!}$ 倍したものを，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ の**外積**といい，

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k \tag{3.8}$$

で表す[2]．

補題 3.1.7　外積により決まる写像

$$(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) \in \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \longmapsto \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$$

は多重線形性と交代性を満たしている．

証明　外積 $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k$ を集合 I^k 上の関数として考える．補題 3.1.1 により，テンソル積 $\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k$ は k 重線形であったから，それを交代化して得られる上の外積も k 重線形である．外積の交代性はその定義による．　■

k 重テンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ の元の中でも，交代性を満たすもの全体のなす集合は部分ベクトル空間になるので，

定義 3.1.8　k 重テンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ の元 $\boldsymbol{z}$ の中でも，交代性を満たすもの

[2] 補題 3.1.17 でわかるように，$1/\sqrt{k\,!}$ 倍しておくことにより，外積は結合法則を満たす．

の全体を，ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の **$\boldsymbol{k}$ 重外積冪**[3]といい，

$$\bigwedge^k \mathbb{C}^n$$

で表し，その元を **$\boldsymbol{k}$ ベクトル**という．とくに，零でない k ベクトルが (3.8) 式のように表せるときには，**分解可能**であるという．

k ベクトルは分解可能な k ベクトルの 1 次結合で表される．

例 3.1.9 $k=2$ の場合の k ベクトル $\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1$ は分解可能ではない．もし $\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ と $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$ が存在したとすると，$(i_1, i_2) \in I^2$ における値は，

$$\delta_{1,i_1}\delta_{2,i_2} + \delta_{2,i_1}\delta_{1,i_2} = x_{i_1} y_{i_2}$$

となるので，$x_1 y_1 = x_2 y_2 = 0$ かつ $x_1 y_2 = x_2 y_1 = 1$．よって，矛盾が生じる．

以下の議論では，$n \times k$ 行列をグラスマン代数の k ベクトルに対応させ，その Cullis 行列式の値や性質を，グラスマン代数の構造を用いて求める．その際，k ベクトルの中でも，行列に対応するのは分解可能なものに限られるので，k ベクトルが分解可能かどうかは基本的な性質である．

$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{C}^n$ に対し，$m > n$ の場合には，交代多重線形性により，

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0}$$

となる．

3.1.3 分解可能 $\boldsymbol{k}$ ベクトルの基礎的性質

つぎの補題により，分解可能な k ベクトルと行列式との関係がわかる．

補題 3.1.10 k 重外積冪における内積は公式

$$(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k | \boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_k) = \det{}_k(((\boldsymbol{x}_i | \boldsymbol{y}_j))) \tag{3.9}$$

[3] この用語は岩波数学辞典によるが，[7] では k 次交代冪，[6] では次数 k の外積と呼ばれている．

を満たしている．ただし，右辺は (i,j) 成分が $(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{y}_j)$ の k 次正方行列 $((\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{y}_j))$ の行列式である．とくに，$X=(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k)$ かつ $Y=(\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_k)$ ならば，

$$(\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{y}_k)=\det{}_k(X^*Y).$$

証明　$(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ における内積は，I^k 上の関数の内積として考えられるので，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{y}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{y}_k)\\&=\sum_{\boldsymbol{i}\in I^k}\overline{(\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{i})}(\boldsymbol{y}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{y}_k)(\boldsymbol{i}).\end{aligned}\tag{3.10}$$

ここで，(3.6) 式を使うと，右辺の第1因数 $(\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{i})$ は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{k\,!}}\sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)(\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_k)(T_\sigma\boldsymbol{i})\\&=\frac{1}{\sqrt{k\,!}}\sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})(\boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(k)})(\boldsymbol{i}).\end{aligned}$$

同様に，右辺の第2因数 $(\boldsymbol{y}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{y}_k)(\boldsymbol{i})$ は

$$\frac{1}{\sqrt{k\,!}}\sum_{\sigma'\in S_k}\mathrm{sgn}((\sigma')^{-1})(\boldsymbol{y}_{(\sigma')^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{y}_{(\sigma')^{-1}(k)})(\boldsymbol{i})$$

と表せるので，(3.10) 式の右辺は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k\,!}\sum_{\sigma,\sigma'\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma\cdot\sigma')(\boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(1)}|\boldsymbol{y}_{(\sigma')^{-1}(1)})\cdots(\boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(k)}|\boldsymbol{y}_{(\sigma')^{-1}(k)})\\&=\frac{1}{k\,!}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\sigma'\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\cdot\sigma')(\boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(\sigma'(1))}|\boldsymbol{y}_1)\cdots(\boldsymbol{x}_{\sigma^{-1}(\sigma'(k))}|\boldsymbol{y}_k)\\&=\frac{1}{k\,!}\sum_{\sigma\in S_n}\det{}_k(((\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{y}_j)))=\det{}_k(((\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{y}_j)))\end{aligned}$$

となり，公式 (3.9) が示された．

ベクトルが行列 X,Y の列ベクトルの場合には，k 次正方行列 X^*Y の (i,j) 成分が $(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{y}_j)$ により与えられることからわかる．■

$n\geq k$ の場合に，$n\times k$ 行列 X の階数が k のときには，X を線形写像と見たときの核は $\{\boldsymbol{0}\}$ となるので，非退化である．これは，X が単射であることとも同値である．

補題 3.1.11　非退化な $n \times k$ 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ に対して，定義 2.1.14 の直後に述べた，$\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ のグラム–シュミットの直交化を $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ とすれば

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k = \left(\prod_{i=1}^{k}\left\|\boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1}(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{b}_j\right\|\right)\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k.$$

証明　補題 3.1.7 により，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k &= \|\boldsymbol{x}_1\|\,(\boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) \\
&= \|\boldsymbol{x}_1\|\,(\boldsymbol{b}_1 \wedge (\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{b}_1|\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{b}_1) \wedge \boldsymbol{x}_3 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) \\
&= \|\boldsymbol{x}_1\|\,\|\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{b}_1|\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{b}_1\|\,(\boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{b}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) \\
&\;\;\vdots \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k}\left\|\boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1}(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{b}_j\right\|\right)\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k.
\end{aligned}$$

■

この補題により，

$$\|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k\| = \prod_{i=1}^{k}\left\|\boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1}(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{b}_j\right\|. \tag{3.11}$$

実ベクトル空間の場合には，2 つのベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を辺にもつ平行四辺形の面積は底辺の長さ $\|\boldsymbol{x}_1\|$ と高さ $\|\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1\|$ の積であるから，その値は $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2$ のノルムにより与えられる．このように，グラム–シュミットの直交化では，ベクトル $\boldsymbol{x}_k - \sum_{j=1}^{k-1}(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{b}_j$ は $\boldsymbol{x}_k$ が $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{k-1}$ の張る $k-1$ 次元部分ベクトル空間と直交する部分を表しているから，ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k$ のノルムの大きさは，各ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ を辺にもつ平行多面体の体積と一致している．また，上の直交部分のノルムは，外積 $\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_{k-1} \wedge \boldsymbol{x}_k$ のノルムとも一致し，外積のもつ幾何学的な意味もわかる．これらの事実は第 3 章で利用されるだけでなく，第 4 章あるいは付録 C へ行ってから，曲面の接ベクトルを使って曲面の面積要素と求めるときにも使われる．

系 3.1.12　$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{C}^n$ とする．

(i) 矩形行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ に対して，$\|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k\| = \det{}_k(|X|)$.

(ii) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{0}$ であることと，集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ が 1 次独立であることは必要十分である．

(iii) 規格ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ に対して，$\|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k\| = 1$ であることと，集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ が直交系であることは必要十分である．

証明　(i) $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ とすれば，補題 3.1.10 の (i) により，

$$\|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k\|^2 = \det{}_k(X^*X) = \det{}_k(|X|^2) = \det{}_k(|X|)^2.$$

(ii) もし $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{0}$ ならば，(i) により，$\det_k(|X|) \neq 0$．したがって，行列 X の階数は k である．ゆえに，集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ は 1 次独立である．この議論は逆に辿れるので，逆の証明ができる．

(iii) 集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ が規格直交系ならば，(i) により，$\|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k\| = 1$．逆に，規格ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ がこのノルムの式を満たせば，各ベクトル $\boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{b}_j$ のノルムは 1 以下であるから，(3.11) 式の左辺が 1 ならば，

$$\left\|\boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{b}_j\right\| = 1 \quad (i = 1, \ldots, k)$$

が成り立つ．$i = 1$ の場合から，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}_1$．$i = 2$ の場合から，$\|\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{b}_1|\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{b}_1\|^2 = 1$ を展開すると，$(\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2) = 0$ かつ $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2$．よって，$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ は規格直交系である．いま，集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell\}$ $(\ell < k)$ が規格直交系であるとする．上の式で $i = \ell + 1$ の場合の両辺を平方すると，

$$\|\boldsymbol{x}_{\ell+1}\|^2 - \sum_{j=1}^{\ell} |(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x}_{\ell+1})|^2 = 1$$

となるので，すべての $j = 1, \ldots, \ell$ に対して，$(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x}_{\ell+1}) = 0$ となり，集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{\ell+1}\}$ も規格直交系である．ゆえに，集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ が規格直交系であることが帰納的にわかる．■

問題 53　非退化な $n \times k$ 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ に対して，$\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ のグラム–シュミットの直交化を $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ とすれば，X は

$$(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k)\begin{pmatrix} \|\boldsymbol{x}_1\| & (\boldsymbol{b}_1|\boldsymbol{x}_2) & \cdots & (\boldsymbol{b}_1|\boldsymbol{x}_{k-1}) & (\boldsymbol{b}_1|\boldsymbol{x}_k) \\ 0 & \|\boldsymbol{x}_2'\| & \cdots & (\boldsymbol{b}_2|\boldsymbol{x}_{k-1}) & (\boldsymbol{b}_2|\boldsymbol{x}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|\boldsymbol{x}_{k-1}'\| & (\boldsymbol{b}_{k-1}|\boldsymbol{x}_k) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \|\boldsymbol{x}_k'\| \end{pmatrix}$$

と等長変換を表す $n\times k$ 行列と $k\times k$ 上半三角行列の積の形に表せることを示せ．ただし，$\boldsymbol{x}_j' = \boldsymbol{x}_j - \sum_{\ell=1}^{j-1}(\boldsymbol{b}_\ell|\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{b}_\ell$ $(j=2,3,\ldots,k)$.

この問題から，$n\times k$ 行列 X の極分解を $V|X|$ とすれば，$\det_{n,k}(V) = \det_{n,k}((\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_k))$ となることがわかる．

3.1.4 グラスマン代数の定義

系 3.1.12 でわかったように，n 次元ベクトル空間において，k 個の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ の外積 $\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_k$ のノルムの大きさは，k 個の各ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i=1,\ldots,k)$ を辺にもつ平行多面体の体積を表していたが，さらに，この外積全体のなすベクトル空間に代数構造を導入することにより，この外積は，この平行多面体が，もとの n 次元ベクトル空間の中で占める向きに関する情報も含んでいることがわかる．そこで，つぎの $n+1$ 個の k 重外積冪 $(k=0,1,\ldots,n)$ からなる直和の中に，接合法則を満たす積構造を導入するための準備をする．

定義 3.1.13 k 重外積冪 $(k=0,1,2,\ldots,n)$ の直和

$$\bigwedge^0\mathbb{C}^n\oplus\bigwedge^1\mathbb{C}^n\oplus\bigwedge^2\mathbb{C}^n\oplus\cdots\oplus\bigwedge^n\mathbb{C}^n$$

を

$$\bigwedge\mathbb{C}^n$$

で表す．ただし，0 重外積冪 $\bigwedge^0\mathbb{C}^n$ は 1 次元ベクトル空間とし，その単位ベクトルを Ω で表す．

この直和を考えるときに，内積も一緒に自然に拡張すると，ベクトル空間 $\bigwedge\mathbb{C}^n$ は内積空間になる．

補題 3.1.14　任意の $\boldsymbol{y} \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ に対して，補題 3.1.6 で交代化されたベクトル $\boldsymbol{z} \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ への対応を B_k とすれば，B_k は $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ 上で $B_k^2 = (k\,!)B_k$ を満たす自己随伴な線形変換である．

証明　$\boldsymbol{y} \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ に対して，(3.3) 式の I^k 上の変換 T_σ を用いて，

$$(B_\sigma \boldsymbol{y})(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{y}(T_\sigma \boldsymbol{i}) \quad (\sigma \in S_k,\ \boldsymbol{i} \in I^k)$$

により，$(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ 上の変換 B_σ を定義すれば，B_σ は線形である．B_k はこれらの交代和 $\sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) B_\sigma$ であるから，B_k も線形である．

$\boldsymbol{y} \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ に対して，$\boldsymbol{z} = B_k \boldsymbol{y}$ とすれば，

$$(B_k^2 \boldsymbol{y})(\boldsymbol{i}) = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \boldsymbol{z}(T_\sigma \boldsymbol{i}) = \sum_{\sigma\in S_k} \boldsymbol{z}(\boldsymbol{i}) = (k\,!)(B_k \boldsymbol{y})(\boldsymbol{i}).$$

ゆえに，$B_k^2 = (k\,!)B_k$．

最後に，$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ に対して，

$$\begin{aligned}(B_\sigma \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}) &= \sum_{\boldsymbol{i}\in I^k} \overline{(B_\sigma \boldsymbol{y})(\boldsymbol{i})}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{i}) = \sum_{\boldsymbol{i}\in I^k} \overline{\boldsymbol{y}(T_\sigma \boldsymbol{i})}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{i}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{i}\in I^k} \overline{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{i})}\boldsymbol{z}(T_{\sigma^{-1}} \boldsymbol{i}) = \sum_{\boldsymbol{i}\in I^k} \overline{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{i})}(B_{\sigma^{-1}} \boldsymbol{z})(\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{y}|B_{\sigma^{-1}} \boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

ゆえに，$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$ であることを使うと，

$$(B_k \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}) = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)(B_\sigma \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}) = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})(\boldsymbol{y}|B_{\sigma^{-1}} \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y}|B_k \boldsymbol{z}).$$

したがって，B_k は自己随伴である．■

補題 3.1.14 により，内積空間 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ から部分ベクトル空間 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ への射影は

$$\frac{1}{k\,!} B_k$$

により与えられる．これを以後 A_k で表せば，各ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ に対して，

$$A_k(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k) = \frac{1}{k\,!} \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(k)}, \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k = \sqrt{k!}A_k(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k) \tag{3.13}$$

などが成り立つ.

定義 3.1.15 内積空間 $\bigwedge \mathbb{C}^n$ において, $\boldsymbol{x} \in \bigwedge^\ell \mathbb{C}^n$ と $\boldsymbol{y} \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ に対して,

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \begin{cases} \sqrt{\binom{\ell+k}{\ell}} A_{\ell+k}(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) & (\ell + k \leq n) \\ \mathbf{0} & (\ell + k > n) \end{cases}$$

かつ $\boldsymbol{z} \in \bigwedge \mathbb{C}^n$ に対して,

$$\boldsymbol{z} \wedge \Omega = \Omega \wedge \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$$

とおいて, 外積の記号を用いて部分的に定義された積を, 空間全体 $\bigwedge \mathbb{C}^n$ へ双線形に拡張したものを改めて**外積**といい, この外積を積

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \left(\bigwedge \mathbb{C}^n\right) \times \left(\bigwedge \mathbb{C}^n\right) \longmapsto \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} \in \bigwedge \mathbb{C}^n$$

とする多元環を**グラスマン代数**という[4].

この外積の定義 3.1.15 に使われている係数は, 後の補題 3.1.17 において, 外積が結合法則を満たすように調整されている. その結果, グラスマン代数の外積はベクトルの外積の自然な拡張になっていることがわかる.

補題 3.1.16 射影作用素 A_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ はつぎの式を満たす.

$$A_{k+\ell+m}(A_{k+\ell} \otimes 1) = A_{k+\ell+m} \quad (1 \text{ は } (\mathbb{C}^n)^{\otimes m} \text{ 上の恒等変換}),$$
$$A_{k+\ell+m}(1 \otimes A_{\ell+m}) = A_{k+\ell+m} \quad (1 \text{ は } (\mathbb{C}^n)^{\otimes k} \text{ 上の恒等変換}).$$

証明 最初の式を示す. 2 番目の式も同様にして示されるので, その証明は省く. また, $k+\ell+m > n$ ならば, 両辺はともに 0 になるので, $k+\ell+m \leq n$ の場合だけを考えればよい.

$$A_{k+\ell+m}(A_{k+\ell} \otimes 1)(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{k+\ell+m})$$

[4] ベクトル空間に積の演算が与えられたものを**多元環**または**代数**という. 例えば, $M_n(\mathbb{C})$ は行列の和, 定数倍, 積に関して多元環である. また, グラスマン代数は**外積代数**をも呼ばれる.

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{(k+\ell)!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\operatorname{sgn}(\sigma)A_{k+\ell+m}\\
&\quad\times(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_{\sigma(k+\ell)}\otimes\boldsymbol{x}_{k+\ell+1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_{k+\ell+m})\\
&=\frac{1}{(k+\ell)!}\frac{1}{\sqrt{(k+\ell+m)!}}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\operatorname{sgn}(\sigma)\\
&\quad\times(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_{\sigma(k+\ell)}\wedge\boldsymbol{x}_{k+\ell+1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_{k+\ell+m})\\
&=\frac{1}{(k+\ell)!}\frac{1}{\sqrt{(k+\ell+m)!}}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_{k+\ell+m}\\
&=\frac{1}{\sqrt{(k+\ell+m)!}}\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_{k+\ell+m}\\
&=A_{k+\ell+m}(\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_{k+\ell+m}).
\end{aligned}
$$

■

補題 3.1.17　グラスマン代数は外積に関して，結合法則

$$(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})\wedge\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\wedge(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z})\quad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\bigwedge\mathbb{C}^n)$$

を満たす．

証明　外積の交代多重線形性により，$0\leq k,\ell,m\leq n$, $k+\ell+m\leq n$ かつ $\boldsymbol{x}\in\bigwedge^k\mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{y}\in\bigwedge^\ell\mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{z}\in\bigwedge^m\mathbb{C}^n$ の場合だけを考えればよい．補題 3.1.16 により

$$A_{k+\ell+m}(A_{k+\ell}\otimes 1)=A_{k+\ell+m}=A_{k+\ell+m}(1\otimes A_{\ell+m})$$

が成り立っている．さて，$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\in\bigwedge^{k+\ell}\mathbb{C}^n$ であるから，

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})\wedge\boldsymbol{z}&=\sqrt{\binom{k+\ell+m}{k+\ell}}A_{k+\ell+m}((\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})\otimes\boldsymbol{z})\\
&=\sqrt{\binom{k+\ell+m}{k+\ell}}\sqrt{\binom{k+\ell}{k}}A_{k+\ell+m}(A_{k+\ell}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})\otimes\boldsymbol{z})\\
&=\sqrt{\binom{k+\ell+m}{k+\ell}}\sqrt{\binom{k+\ell}{k}}A_{k+\ell+m}(A_{k+\ell}\otimes 1)(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{z}).
\end{aligned}
$$

ここで，つぎの等式

$$\binom{k+\ell+m}{k+\ell}\binom{k+\ell}{k}=\frac{(k+\ell+m)!}{k!\ell!m!}=\binom{k+\ell+m}{\ell+m}\binom{\ell+m}{\ell}$$

に注意すると，上の式は

$$\begin{aligned}
&=\sqrt{\binom{k+\ell+m}{\ell+m}}\sqrt{\binom{\ell+m}{\ell}}A_{k+\ell+m}(1\otimes A_{\ell+m})(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{z})\\
&=\sqrt{\binom{k+\ell+m}{\ell+m}}\sqrt{\binom{\ell+m}{\ell}}A_{k+\ell+m}(\boldsymbol{x}\otimes A_{\ell+m}(\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{z}))\\
&=\sqrt{\binom{k+\ell+m}{\ell+m}}A_{k+\ell+m}(\boldsymbol{x}\otimes(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}))\\
&=\boldsymbol{x}\wedge(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z})
\end{aligned}$$

となり，結合法則が示された． ■

補題 3.1.7 は分解可能 k ベクトルが（Cullis 行列式と同じように）多重線形性と交代性を満たすことを示している．つぎの 3.2 節では，Cullis 行列式をグラスマン代数の言葉で読み替えることにする．そのために，以下しばらくは，残る規格化条件を，グラスマン代数の用語を用いて記述する準備をする．

3.2 Cullis 行列式とグラスマン代数

最初に，交代 k 重線形汎関数 f はグラスマン代数のある k ベクトル $\boldsymbol{y}$ を用いて，

$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k)=(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_k)$$

と表せることを示す．$n\times k$ 行列 $X=(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k)$ の行列式の Cullis 行列式 $\det_{n,k}(X)$ は，定義 2.3.2 で説明したように，列ベクトルに関して交代多重線形性を満たしていたので，この結果により，グラスマン代数のある k ベクトル $\mathbf{1}^{(k)}$ を用いて

$$\det{}_{n,k}(X)=(\mathbf{1}^{(k)}|\boldsymbol{x}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_k) \tag{3.14}$$

と書き直すことができる．しかも，このベクトル $\mathbf{1}^{(k)}$ は，これからこの節で定義する Cullis 基底に属するベクトルの総和として表すことができる．その結果，$n \times k$ 行列 X の行列式の値は，この行列に対応するグラスマン代数における分解可能 k ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k$ を，Cullis 基底に関して直交展開したときの係数の総和であることがわかる．そこで，以後，この行列 X に対応する k ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k$ を，

$$\pi_k(X) \tag{3.15}$$

で表す．

3.2.1　Cullis 行列式と Cullis 基底

まず，つぎの定理により，k 変数の多重線形汎関数が，k 重外積冪 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ のあるベクトルに対応していることを示そう．

定理 3.2.1　f がベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 上の交代 k 重線形汎関数ならば，

$$f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = (\boldsymbol{y} | \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)$$

を満たす k ベクトル $\boldsymbol{y} \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ が一意的に存在する．

証明　f は多重線形汎関数であるから，命題 3.1.4 により，自然な多重線形変換 $\beta : \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \to (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ を用いると，$F \circ \beta = f$ を満たす，k 重テンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ 上の線形汎関数 F が存在する．したがって，リースの定理により，

$$f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = F(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k) = (\boldsymbol{y} | \boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k)$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{y} \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ が一意的に存在する．多重線形汎関数 f は交代性を満たしているので，任意の置換 $\sigma \in S_k$ に対して，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{y} | \boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(k)}) &= f(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma)(\boldsymbol{y} | \boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k).\end{aligned}$$

よって，(3.12) 式で定義した射影写像 A_k を用いると，任意の k 重ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ に対して，

$$\begin{aligned}(A_k\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k) &= (\boldsymbol{y}|A_k(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k)) \\ &= \frac{1}{k\,!}\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k\,!}\sum_{\sigma\in S_n} (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k) = (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k).\end{aligned}$$

ゆえに，$\boldsymbol{y} = A_k\boldsymbol{y} \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$.　■

定義 2.3.2 において，$n \times k$ 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ に対する Cullis 行列式 $\det_{n,k}(X)$ の定義に用いた交代多重線形汎関数 $D_{n,k}$ に，上の定理を適用すると，

$$D_{n,k}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) = (\mathbf{1}^{(k)}|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)$$

を満たす k ベクトル $\mathbf{1}^{(k)}$ が一意的に存在する．そこで，つぎはこのベクトルを具体的に求める議論に移る．

その準備に，k 重外積冪 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ における代表的な基底を 2 つ用意するが，これらは，本書を通じて，中心的な役割を果たすことがわかるだろう．

補題 3.2.2　各 $c \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，$\sigma(K) = c$ を満たす $\sigma \in S_k^I$ を用いて[5]，

$$\boldsymbol{e}_c^I = \mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)\, \boldsymbol{e}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{\sigma(k)}$$

とする．このとき，

(i) 右辺は σ の選び方によらず一意的に決まる．

(ii) 集合 $\{\boldsymbol{e}_c^I \mid c \in \mathscr{C}_k^I\}$ はベクトル空間 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の規格直交基底である．

証明　(i) $\sigma' \in S_k^I$ が $\sigma'(K) = c$ を満たしているとすれば，

$$\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma') = \mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)\ \mathrm{sgn}\begin{pmatrix}\sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \\ \sigma'(1) & \cdots & \sigma'(k)\end{pmatrix}$$

---

[5] S_k^I は K から I への全単射全体のなす集合である．定義 1.4.14 参照．

と

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}\sigma(1) & \cdots & \sigma(k)\\ \sigma'(1) & \cdots & \sigma'(k)\end{pmatrix} \boldsymbol{e}_{\sigma'(1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{\sigma'(k)} = \boldsymbol{e}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{\sigma(k)}$$

が成り立つ．したがって，$\operatorname{sgn}_{n,k}(\sigma')\,\boldsymbol{e}_{\sigma'(1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{\sigma'(k)} = \boldsymbol{e}_c^I$ となる．

(ii) $c, d \in \mathscr{C}_k^I$ の元を小さい順に並べたものをそれぞれ $i_1, \ldots, i_k$ と $j_1, \ldots, j_k$ とする．$c \neq d$ ならば，$c \setminus d$ の元は $A_k(\boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_k})$ を交代化する展開式の添え字には現れないから，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} | \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j_k})\\ =&k\,!\,(A_k(\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_k}) | A_k(\boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_k}))\\ =&k\,!\,(\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_k} | A_k(\boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_k})) = 0\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{e}_c^I \perp \boldsymbol{e}_d^I$ が成り立つ．したがって，集合 $\{\boldsymbol{e}_c^I \mid c \in \mathscr{C}_k^I\}$ は $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の規格直交系である．つぎに，この集合が基底であることを示す．$d = (d_1, \ldots, d_k) \in I^k$ に対して，$\boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{e}_{d_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{d_k}$ とすれば，集合 $\{\boldsymbol{e}_d \mid d \in I^k\}$ は内積空間 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ の規格直交基底である．このとき，$d_1, \ldots, d_k$ がすべて異なっている場合には，$d \in \mathscr{C}_k^I$ となり $A_k\boldsymbol{e}_d$ は $\boldsymbol{e}_d^I$ の定数倍になるが，$d_1, \ldots, d_k$ のどれか 2 つが一致している場合には $A_k\boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{0}$ となる．したがって，集合 $\{\boldsymbol{e}_c^I \mid c \in \mathscr{C}_k^I\}$ は部分ベクトル空間 $A_k(\mathbb{C}^n)^{\otimes k} = \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ を張っており，$\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の規格直交基底である．■

補題 3.2.3　各 $c \in \mathscr{C}_k^I$ の元を小さい順に並べた $i_1, \ldots, i_k$ を用いて，

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}$$

とする．このとき，

(i) $\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \operatorname{sgn}_I(c)\boldsymbol{e}_c^I$.

(ii) 集合 $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \mid c \in \mathscr{C}_k^I\}$ はベクトル空間 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の規格直交基底である．

証明　(i) $\sigma \in S_k^I$ を $\sigma(K) = c$ を満たす単射とする．このとき，

$$\operatorname{sgn}_I(c)\boldsymbol{e}_c^I = \operatorname{sgn}_I(c)\operatorname{sgn}_{n,k}(\sigma)\,\boldsymbol{e}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{\sigma(k)}$$

$$= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \end{pmatrix} \boldsymbol{e}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{\sigma(k)}$$

$$= \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}.$$

(ii) 主張 (i) と前の補題 3.2.2 による. ■

$c = \{j\} \in \mathscr{C}_1^I$ の場合には, $\operatorname{sgn}_I(c) = (-1)^{j-1}$ であるから,

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{e}_c^I = (-1)^{j-1}\boldsymbol{e}_j$$

である.

定義 3.2.4 各 $k = 1, \ldots, n$ に対して, k 重外積冪 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ における規格直交基底 $\{\boldsymbol{e}_c^I \mid c \in \mathscr{C}_k^I\}$ を **Cullis 基底**, 規格直交基底 $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \mid c \in \mathscr{C}_k^I\}$ を**余 Cullis 基底**という.

以後, $\boldsymbol{e}_\emptyset^I = \widetilde{\boldsymbol{e}}_\emptyset^I = \Omega$ としておく. また, 今後,

$$\boldsymbol{e}_c^I = \operatorname{sgn}_I(c)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I, \quad \boldsymbol{e}_I^I = \boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n$$

などの読み替えは, 頻繁に用いる.

実は, つぎの定理で示すように, Cullis 基底は Cullis 行列式の値を具体的に求めるときに使われる基底である. それに対して, 余 Cullis 基底は, 3.2.3 項で説明するように, Cullis 基底にホッジ作用素を作用させたものとしても表せるが, それだけでなく, 後に付録 A で説明するように, 射影幾何において, 部分射影空間を記述する際のプリュッカー座標を導く基底でもある. この事実は Cullis 基底が既成の数学とも接点をもつ自然な対象物であることを示唆している.

一般に, $\mathbb{C}^n$ の規格直交基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を用いて得られる集合

$$\{\boldsymbol{b}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_{j_k} \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n\}$$

は k 重外積冪 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ における規格直交基底になる. 実際, 補題 3.1.10 により, 規格直交系であることがわかる. さらに, 外積の多重線形性により基底であることもわかる. (n 次ユニタリ行列 $U = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ と 3.3.2 項の Γ 作用を用いると, $\Gamma(U)$ を k 次外積冪へ制限したものはユニタリで, 上の集合

はこの線形変換による余 Cullis 基底の像である.)

つぎに，k ベクトル $\pi_k(X)$ の Cullis 基底に関する展開係数の和が X の Cullis 行列式の値になることを示す．これは，証明からもわかるように，$n\times k$ 行列の Cullis 行列式の値が k 次正方行列の行列式の値の和で表されるという，定理 1.4.9，定理 2.4.4 の書き換えにもなっている.

定理 3.2.5　$n\times k$ 行列 X の Cullis 行列式はつぎのように表せる.

$$\det{}_{n,k}(X)=\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}(\boldsymbol{e}_c^I|\pi_k(X)),$$

$$\det{}_{n,k}(P_cX)=(\boldsymbol{e}_c^I|\pi_k(X)).$$

証明　この節の冒頭で説明したように，Cullis 行列式は，(3.14) 式のように表せる．したがって，定理 2.4.2 により，$(\mathbf{1}^{(k)}|\pi_k(E_c))=\det{}_{n,k}(E_c)=\mathrm{sgn}_I(c)$ である．他方，$\pi_k(E_c)=\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I$ である．したがって，

$$\mathbf{1}^{(k)}=\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}(\mathbf{1}^{(k)}|\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I=\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\mathrm{sgn}_I(c)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I=\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\boldsymbol{e}_c^I. \tag{3.16}$$

ゆえに，

$$\det{}_{n,k}(X)=(\mathbf{1}^{(k)}|\pi_k(X))=\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}(\boldsymbol{e}_c^I|\pi_k(X)).$$

ここで，X に P_cX を代入すると，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(P_cX)&=\sum_{d\in\mathscr{C}_k^I}(\boldsymbol{e}_d^I|\pi_k(P_cX))=\sum_{d\in\mathscr{C}_k^I}\mathrm{sgn}_I(d)(\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I|\pi_k(P_cX))\\&=\sum_{d\in\mathscr{C}_k^I}\mathrm{sgn}_I(d)(\pi_k(E_d)|\pi_k(P_cX))\\&=\sum_{d\in\mathscr{C}_k^I}\mathrm{sgn}_I(d)\det{}_k(E_d^*P_cX).\end{aligned}$$

$d\neq c$ ならば，k 次正方行列 $E_d^*P_cX$ の行の添え字が $d\setminus c$ に属する行は零ベクトルになるので，$\det{}_k(E_d^*P_cX)=0$．また，$E_c^*P_cX=E_c^*X$ であるから，補題 3.1.10 により，

$$\det{}_{n,k}(P_cX)=\mathrm{sgn}_I(c)\det{}_k(E_c^*X)=\mathrm{sgn}_I(c)(\pi_k(E_c)|\pi_k(X))$$

$$= \mathrm{sgn}_I(c)(\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|\pi_k(X)) = (\boldsymbol{e}_c^I|\pi_k(X)). \qquad \blacksquare$$

3.2.2 余 Cullis 行列式

この項では，矩形行列に対して，もう 1 つ新たな行列式を定義し，その簡単な性質を調べる．これは，後に定理 3.4.1 で示すように，次項で説明するホッジ作用素を通じて，Cullis 行列式と双対な関係にあることがわかる．

定義 3.2.6 $n \times k$ 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ に対して，$\mathbb{C}^n$ 上の k 重交代線形汎関数 $\widetilde{D}_{n,k}$ で規格条件

$$\widetilde{D}_{n,k}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}) = 1 \quad (i_1 < \cdots < i_k)$$

を満たすものがとる値 $\widetilde{D}_{n,k}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ を行列 X の**余 Cullis 行列式**といい，

$$\mathrm{Det}_{n,k}(X)$$

で表す．

命題 3.2.7 $n \times k$ 行列 X と $c \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，

(i) $\mathrm{Det}_{n,k}(X) = (\widetilde{\mathbf{1}}^{(k)}|\pi_k(X))$ を満たす k ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}^{(k)}$ は

$$\widetilde{\mathbf{1}}^{(k)} = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \tag{3.17}$$

により与えられる．

(ii) $\mathrm{Det}_{n,k}(P_c X) = \det{}_k(E_c^* X) = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|\pi_k(X))$.

(iii) $\mathrm{Det}_{n,k}(X) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \mathrm{Det}_{n,k}(P_c X)$.

証明 (i) 定義 3.2.6 により，$(\widetilde{\mathbf{1}}^{(k)}|\pi_k(E_c)) = \mathrm{Det}_{n,k}(E_c) = 1$ である．また，$\pi_k(E_c) = \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I$ であるから，

$$\widetilde{\mathbf{1}}^{(k)} = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} (\widetilde{\mathbf{1}}^{(k)}|\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I.$$

(ii) 補題 3.1.10 により，

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}_{n,k}(P_cX) &= \sum_{d\in\mathscr{C}_k^I}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I|\pi_k(P_cX)) = \sum_{d\in\mathscr{C}_k^I}(\pi_k(E_d)|\pi_k(P_cX)) \\ &= \sum_{d\in\mathscr{C}_k^I}\det{}_k(E_d^*P_cX) = \det{}_k(E_c^*X).\end{aligned}$$

ゆえに，再び，補題 3.1.10 により，

$$\mathrm{Det}_{n,k}(P_cX) = \det{}_k(E_c^*X) = (\pi_k(E_c)|\pi_k(X)) = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|\pi_k(X)).$$

(iii) (i) と (ii) を組み合わせると

$$\mathrm{Det}_{n,k}(X) = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|\pi_k(X)) = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\mathrm{Det}_{n,k}(P_cX). \qquad \blacksquare$$

今後，k ベクトルの記号 $\mathbf{1}^{(k)}$ と $\widetilde{\mathbf{1}}^{(k)}$ は (3.16) 式と (3.17) 式により与えられているものに対して用いることにし，それぞれ **Cullis ベクトル**，**余 Cullis ベクトル**ということにする．

問題 54　2 つの矩形行列 $X_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ と $X_2 \in M_{n,n-k}(\mathbb{C})$ のなす正方行列 $X = (X_1, X_2)$ に対して，つぎの式を示せ．

$$\det{}_n(X) = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\det{}_{n,k}(P_cX_1)\mathrm{Det}_{n,n-k}(P_{I\setminus c}X_2).$$

余 Cullis 行列式に対しても，系 1.4.12 および系 2.4.7 と同じようなことが成り立つので，それを問題にしておく．

問題 55　$X \in M_{n,n-1}(\mathbb{C})$ に対して，つぎのことを示せ．

(i) $\mathrm{Det}_{n,n-1}(X) = \det{}_n((\mathbf{1}^{(1)}, X))$.

(ii) X が非退化ならば，$\mathrm{Det}_{n,n-1}(X) = 0$ と $\mathbf{1}^{(1)} \in X\mathbb{C}^n$ は必要十分である．

3.2.3　ホッジ作用素

グラスマン代数では，各 $k = 0, 1, \ldots, n$ に対して，k 重外積冪 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ と $n-k$ 重外積冪 $\bigwedge^{n-k} \mathbb{C}^n$ とは同じ次元 $\binom{n}{k}$ をもっているので，それらの間の関係を与える，グラスマン代数上の自己双対な作用素を考える．これはホッ

ジ作用素と呼ばれ，グラスマン代数において，もとのベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ における，**部分ベクトル空間**どうしの直交関係を，グラスマン代数の対応する**ベクトル**どうしの直交関係に読み替えて議論するときなどに利用される．

まず，n 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の k 次元部分ベクトル空間 $\mathscr{V}$ とその直交補空間 $\mathscr{V}^\perp$ は直交性を通じて双対な関係にある．そこで，$\mathscr{V}$ の基底 $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ と $\mathscr{V}^\perp$ の基底 $\{\boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を用いて得られる 2 つの元

$$\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k \in \bigwedge\nolimits^k \mathbb{C}^n, \quad \boldsymbol{b}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_n \in \bigwedge\nolimits^{n-k} \mathbb{C}^n$$

の間の関係を調べてみよう．

定理 3.2.8 グラスマン代数 $\bigwedge \mathbb{C}^n$ 上には，つぎの 2 条件

(i) $J : \bigwedge^k \mathbb{C}^n \to \bigwedge^{n-k} \mathbb{C}^n \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$.

(ii) n 次正方行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ に対して，

$$(J(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) | \boldsymbol{x}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n) = \det{}_n(X) \quad (k = 1, \ldots, n-1),$$
$$(J\Omega | \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n) = \det{}_n(X) = (J(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n) | \Omega).$$

を満たす共役線形変換 J が一意的に存在し，$J\Omega = \boldsymbol{e}_I^I$.

証明 k 重外積冪 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の元 $\boldsymbol{y}$ と $n-k$ 重外積冪 $\bigwedge^{n-k} \mathbb{C}^n$ の元 $\boldsymbol{z}$ に対して，

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = (\boldsymbol{e}_I^I | \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) \tag{3.18}$$

とおくと，これは上の 2 つのベクトル空間上の双線形汎関数である．したがって，$n-k$ 重外積冪 $\bigwedge^{n-k} \mathbb{C}^n$ は k 重外積冪 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の双対空間と見なすことができ，この関係は内積空間 $\bigwedge \mathbb{C}^n$ 全体に拡張することができる．そこで，線形汎関数 $\boldsymbol{z} \mapsto \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ に，リースの定理を使うと，$\bigwedge \mathbb{C}^n$ 上の共役線形変換 $J : \bigwedge^k \mathbb{C}^n \to \bigwedge^{n-k} \mathbb{C}^n$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ で，

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = (J\boldsymbol{y} | \boldsymbol{z}) \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

を満たすものが存在する．したがって，条件 (i) がわかる．つぎに，行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ を考える．分解可能 k ベクトルに対しては，(3.18) 式と補題 3.1.10 により，

$$(J(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) | \boldsymbol{x}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n)$$

$$=\langle \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n \rangle$$
$$=(\boldsymbol{e}_I^I | \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n) = \det{}_n(X)$$

となるので，条件 (ii) の最初の式がわかる．とくに，$k=0$ と $k=n$ の場合には

$$(J\Omega | \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n) = (J(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n) | \Omega) = (\boldsymbol{e}_I^I | \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n)$$

となるので，後の式がわかり，$J\Omega = \boldsymbol{e}_I^I$ である．

また，ある共役線形変換 J' が，任意の $X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$(J'(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) | \boldsymbol{x}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n) = \det{}_n(X)$$

を満たしているとすると，任意の k ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k$ に対して

$$J(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) = J'(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)$$

となるので，各 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対する部分ベクトル空間 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ 上で，$J = J'$．よって，J の一意性がわかる． ■

この定理により，n 次元内積空間の任意の k 次元部分ベクトル空間から ($n-k$ 次元の) その直交補空間への対応を，グラスマン代数の中の対応する分解可能 k ベクトルから対応する分解可能 $n-k$ ベクトルへの変換に読み替えたものが，上の共役線形変換 J であることがわかった．そこで，この共役線形作用素を，実ベクトル空間の場合の名称をそのまま踏襲して，**ホッジ作用素**[6]ということにする．とくに，$n=2$ のときは，$J\boldsymbol{e}_i = (-1)^i \boldsymbol{e}_{3-i}$ $(i=1,2)$ である．

つぎに，このホッジ作用素の基本性質を挙げておこう．最初の性質は，前にも述べたように，Cullis 基底がプリュッカー座標を導く余 Cullis 基底とホッジ作用素を通じて結ばれていることを主張している．

補題 3.2.9　ホッジ作用素 J はつぎの性質をもつ．

[6] ホッジ作用は随伴の記号を大きくした $*$ を用いて，$J\boldsymbol{x}$ の代わりに，$*\boldsymbol{x}$ と表されるのが一般的である．

(i) $J\boldsymbol{e}^I_c = \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c}$.

(ii) $J^2\boldsymbol{x} = (-1)^{k(n-k)}\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n)$.

(iii) 反ユニタリ変換である.

(iv) $J^*\boldsymbol{x} = (-1)^{k(n-k)}J\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n)$.

(v) $c \in \mathscr{C}^I_k$ と $d \in \mathscr{C}^I_\ell$ に対して

$$J\boldsymbol{e}^I_c \wedge J\boldsymbol{e}^I_d = \begin{cases} \pm J\boldsymbol{e}_{c\cap d} & (c \cup d = I) \\ \boldsymbol{0} & (c \cup d \neq I) \end{cases}.$$

証明 (i) $c \in \mathscr{C}^I_k$ かつ $c' \in \mathscr{C}^I_k$ とする. $c' \neq c$ のときには, $c \cap (I \setminus c') \neq \emptyset$ となるから, $n \times n$ 行列 $X = (E_c, E_{I\setminus c'})$ の行列式の値は $\det{}_n(X) = 0$ となる. また, 補題 2.4.2 により, $\det{}_n((E_c, E_{I\setminus c})) = \mathrm{sgn}_I(c)$ であるから, 定理 3.2.8 により,

$$(J\,\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c|\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c'}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}_I(c) & (c' = c) \\ 0 & (c' \neq c) \end{cases}.$$

したがって, $J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c$ は $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c'} \mid c' \neq c\}^\perp$ の元である. また, 補題 3.2.3 により, この直交補空間は $\mathbb{C}\widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus c}$ となるので, 上の式から $J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c = \mathrm{sgn}_I(c)\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c}$. ゆえに, 再び補題 3.2.3 により, $J\boldsymbol{e}^I_c = \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c}$.

(ii) (i) を用いると,

$$J^2\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c = \mathrm{sgn}_I(c)J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c} = \mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_I(I \setminus c)\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c.$$

この式が任意の $c \in \mathscr{C}^I_k$ に対して成り立つので, 命題 2.3.7 により, 各部分ベクトル空間 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ 上で, $J^2 = (-1)^{k(n-k)}1$.

(iii) 作用素 J は共役線形であり, しかも各 $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ に対して, $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の Cullis 基底 $\{\boldsymbol{e}^I_c \mid c \in \mathscr{C}^I_k\}$ を $\bigwedge^{n-k} \mathbb{C}^n$ の余 Cullis 基底 $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c} \mid c \in \mathscr{C}^I_k\}$ へ移しているので, 全射等長であることがわかる. したがって, 作用素 J は反ユニタリである.

(iv) 各 $\boldsymbol{x} \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ と $\boldsymbol{y} \in \bigwedge^{n-k} \mathbb{C}^n$ に対して,

$$(J^*\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (J\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = (J\boldsymbol{x}|J^2\boldsymbol{y}) = (-1)^{k(n-k)}(J\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}).$$

(v) $I \setminus (c \cup d) = (I \setminus c) \cap (I \setminus d)$ であるから, $J\boldsymbol{e}^I_c \wedge J\boldsymbol{e}^I_d = \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c} \wedge \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus d}$

の右辺は，$c \cup d$ が I と一致すれば $J\boldsymbol{e}^I_{c\cap d}(=\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus(c\cap d)})$ または $-J\boldsymbol{e}^I_{c\cap d}$ となるし，一致しなければ $\mathbf{0}$ となる．■

n が奇数の場合にはいつでも $J^2=1$ かつ $J^*=J$ となるが，n が偶数の場合には，すべての偶数重外積冪の直和上では $J^2=1$ かつ $J^*=J$ となるが，すべての奇数重外積冪の直和上では $J^2=-1$ かつ $J^*=-J$ となり，J が虚数単位のようになっていることに注意しよう．

例 3.2.10　ここでは，本書とは関係ないが，ベクトル解析で使われる外積 $\times$ と，グラスマン代数の外積 $\wedge$ との関係を説明しておく．

(i) 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^3$ の場合には，

$$(J\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3)=(J(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2)|\boldsymbol{e}_3)=\det{}_3((\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3))=1$$

となるから，

$$J\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3,\quad J\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1,\quad J\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2,$$
$$J(\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_3,\quad J(\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_1,\quad J(\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_2.$$

(ii) 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ におけるベクトル解析では，2 つのベクトル $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,x_2,x_3)$ と $\boldsymbol{y}={}^t(y_1,y_2,y_3)$ の外積 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}={}^t(z_1,z_2,z_3)$ が

$$(z_1,z_2,z_3)=\left(\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$$

で与えられる．このベクトルは $\boldsymbol{y}$ を 2 次元部分ベクトル空間 $\{\boldsymbol{x}\}^\perp$ へ射影し，$\boldsymbol{x}$ を中心として正の向きに $\pi/2$ 回転させ，$\|\boldsymbol{x}\|$ 倍したものである．グラスマン代数の記号を使うと，$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=J(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})$ と表せる．このとき，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})|\boldsymbol{w})&=(J(\boldsymbol{x}\wedge J(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}))|\boldsymbol{w})=\det{}_3((\boldsymbol{x},J(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}),\boldsymbol{w}))\\&=\det{}_3((J(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}),\boldsymbol{w},\boldsymbol{x}))=(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}|\boldsymbol{w}\wedge\boldsymbol{x})\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}\otimes\boldsymbol{y}|\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{w})\\&=((\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}|\boldsymbol{w})\end{aligned}$$

となる．この式の左辺と右辺を結ぶ式 $\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}$ はラ

グランジュの公式と呼ばれ，これを使うと，

$$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

となることがわかる（つまり，ヤコビの恒等式を満たす）ので，この外積はグラスマン代数の外積とは違って結合法則を満たさない．

以後，n 次元内積空間 $\mathscr{V}$ 上の $k(\leq n)$ 次元射影全体の集合を $\mathrm{Proj}^k(\mathscr{V})$ で表すことにする．$\mathrm{Proj}(\mathscr{V}) = \bigcup_{k=0}^n \mathrm{Proj}^k(\mathscr{V})$ である．

定理 3.2.11 射影 $P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ の像 $P\mathbb{C}^n$ の規格直交基底を $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ とする．

(i) $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ が $X\mathbb{C}^k = P\mathbb{C}^n$ を満たせば，$\pi_k(X) \in \mathbb{C}(\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k)$.

(ii) 1 次元部分ベクトル空間 $\mathbb{C}(\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k)$ への射影を $\pi(P)$ とし，集合 $\{p \in \mathrm{Proj}^1(\bigwedge \mathbb{C}^n) \mid p \bigwedge \mathbb{C}^n$ は分解可能 k ベクトル $\}$ を $\mathscr{M}_k$ とすれば，写像

$$P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n) \longmapsto \pi(P) \in \mathscr{M}_k \quad (k \in I)$$

は全単射である．

(iii) $U = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ が n 次ユニタリ行列ならば，

$$J(\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k) = \overline{\det{}_n(U)}(\boldsymbol{b}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_n). \tag{3.19}$$

(iv) $P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ に対して，$J\pi(P)J^* = \pi(1_n - P)$.

(v) k ベクトル $\boldsymbol{z} \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ が分解可能であることと，$n-k$ ベクトル $J\boldsymbol{z}$ が分解可能であることは必要十分である．

証明 (i) X の像と P の像は一致しているから，X の各列ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ は正則な k 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ を用いて，

$$\boldsymbol{x}_j = \sum_{i=1}^k a_{i,j} \boldsymbol{b}_i$$

と表せる．このとき，外積 $\boldsymbol{b}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_{i_k}$ は，その添え字の中に同じものが現

れると零ベクトルになるが，添え字がすべて違っている場合には，$\sigma(j) = i_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ を満たす $\sigma \in S_k$ が存在するので，

$$\boldsymbol{b}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_{i_k} = \operatorname{sgn}(\sigma) \boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k$$

と表せる．したがって，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k &= \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{k} a_{i_1,1} \cdots a_{i_k,k} \, \boldsymbol{b}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_{i_k} \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(k),k} \, \boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k \\ &= \det{}_k(A) \, \boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k. \end{aligned}$$

ゆえに，$\pi_k(X) \in \mathbb{C}(\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k)$.

(ii) $k = n$ の場合は明らかである．$k < n$ の場合を考える．$\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ の 2 元 P と P' に対して，$P\mathbb{C}^n$ と $P'\mathbb{C}^n$ における規格直交基底をそれぞれ，$\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$, $\{\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_k\}$ とする．もし $\mathbb{C}(\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k) = \mathbb{C}(\boldsymbol{b}'_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}'_k)$ ならば，任意の $i = 1, \ldots, k$ に対して，

$$\boldsymbol{b}'_i \wedge \boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0}$$

となるので，系 3.1.12 の (ii) により，$\{\boldsymbol{b}'_i, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ は $\mathbb{C}^n$ において 1 次従属である．したがって，$P\boldsymbol{b}'_i = \boldsymbol{b}'_i$ となるので，$P' \leq P$. P と P' を入れ替えて考えると，逆向きの不等式も得られるので，$P = P'$. よって，π は単射である．

また，$p \in \mathscr{M}_k$ ならば，$\mathrm{Im}(p) = \mathbb{C}\pi_k(X)$ を満たす非退化な $n \times k$ 行列 X が存在するので，$\mathrm{Im}(X)$ への射影を P とすれば，$P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$. しかも，主張 (i) により，$\pi(P) = p$ となるので，写像 π は全射である．

(iii) $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ は規格直交基底であるから，分解可能 k ベクトル $\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k$ と $\boldsymbol{b}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_n$ はともに規格ベクトルである．また行列 $U = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ はユニタリであるから，その行列式の値は絶対値 1 の複素数である．このとき，定理 3.2.8 の (ii) により，

$$\det{}_n(U) = (J(\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k) | \boldsymbol{b}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_n)$$

が成り立つ．一般に，2 つの規格ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積の値が 1 ならば，$\|\boldsymbol{a} -$

$b\|^2 = \|a\|^2 - (a|b) - (b|a) + \|b\|^2 = 0$ となるので，$a = b$. このことから，条件 (iii) がわかる．

(iv) ユニタリ行列 U の行列式の値の絶対値は 1 であるから，(3.19) 式の両辺にホッジ作用素の随伴を作用させると，

$$J^*(\boldsymbol{b}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_n) = \overline{\det{}_n(U)}\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k$$

となる．ゆえに，

$$\begin{aligned} J\pi(P)J^*(\boldsymbol{b}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_n) &= J\pi(P)\overline{\det{}_n(U)}(\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k) \\ &= \det{}_n(U)J\pi(P)(\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k) \\ &= \det{}_n(U)J(\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_k) \\ &= \boldsymbol{b}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_n. \end{aligned}$$

集合 $\{\boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ は $(1_n - P)\mathbb{C}^n$ の規格直交基底であるから，射影 $\pi(1_n - P)$ は $\boldsymbol{b}_{k+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_n$ への 1 次元射影である．他方，$J\pi(P)J^*$ も 1 次元射影であるから，上の式により，$\pi(1_n - P)$ と一致しなければならない．

(v) 射影による (iv) の記述をベクトルで読み替えればよい． ■

3.2.4 分解可能ベクトルの特徴付け

この節の最後に，k ベクトルが分解可能であるための必要十分条件を示しておく．$\mathbb{C}^n$ の $n-1$ 重外積冪は $J\mathbb{C}^n$ と表せるので，定理 3.2.11 の (v) により，$n-1$ ベクトルはすべて分解可能である．したがって，この条件は k が $1 < k < n-1$ を満たす場合にのみ意味をもつ．さらに，この結果は，付録 A において，プリュッカーの関係式を満たす $n \times k$ 行列を求める際に必要になる．

定理 3.2.12 $k < n-1$ とする．k ベクトル $\boldsymbol{x} \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ が分解可能であるための必要十分条件は，任意の $n-k-1$ ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して

$$(J\boldsymbol{x}) \wedge J(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つことである．

証明　必要性．ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のいずれかが零ベクトルの場合には明らかであるから，共に零ベクトルでない場合を考える．k ベクトル $\boldsymbol{x}$ は分解可能であるとする．$n-k-1$ ベクトルは分解可能 $n-k-1$ ベクトルの 1 次結合として表せるので，外積の多重線形性により，$n-k-1$ ベクトル $\boldsymbol{y}$ も分解可能な場合に定理を示せばよい．この場合には，非退化な行列 $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ と $Y \in M_{n,n-k-1}(\mathbb{C})$ を用いて，$\boldsymbol{x} = \pi_k(X)$, $\boldsymbol{y} = \pi_{n-k-1}(Y)$ と表せる．このとき，$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ は $n-1$ ベクトルであるから，$X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ とすると，定理 3.2.8 により，

$$(J(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})|\boldsymbol{x}_i) = \det{}_n((X, Y, \boldsymbol{x}_i)) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k)$$

となり，ベクトル $J(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})$ は $(X\mathbb{C}^k)^\perp$ の元である．他方，定理 3.2.11 の (v) により，$J\boldsymbol{x}$ は分解可能であるから，非退化な行列 $Z \in M_{n,n-k}(\mathbb{C})$ を用いて，$J\boldsymbol{x} = \pi_{n-k}(Z)$ と表せる．Z の列ベクトルの集合は，定理 3.2.11 の (i) と (iii) により，$(X\mathbb{C}^k)^\perp$ の基底であるから，$(J\boldsymbol{x}) \wedge J(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ となる．

十分性．k ベクトル $\boldsymbol{x}$ が零ベクトルではない場合だけを考えればよい．$\boldsymbol{x}$ は Cullis 基底を用いて，$\sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} a_c \boldsymbol{e}_c^I$ と表せる．$\boldsymbol{x}$ は零ベクトルではないから，$a_c \neq 0$ を満たす添え字 $c \in \mathscr{C}_k^I$ が存在する．$I \setminus c$ の元を小さい順に並べたものを $i_1, \ldots, i_{n-k}$ とし，

$$\boldsymbol{y}_\ell = \boldsymbol{e}^I_{I \setminus (c \cup \{i_\ell\})} \in \bigwedge\nolimits^{n-k-1} \mathbb{C}^n$$

とすれば，集合 $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{n-k}\}$ は $\bigwedge^{n-k-1} \mathbb{C}^n$ における規格直交系である．このとき，$c \cap (I \setminus (c \cup \{i_\ell\})) = \emptyset$ であるから，$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}_\ell \neq \boldsymbol{0}$．したがって，集合 $\{\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}_{n-k}\}$ は $\bigwedge^{n-1} \mathbb{C}^n$ において 1 次独立である．ゆえに，$\boldsymbol{z}_\ell = J(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}_\ell)$ とおいて得られる集合 $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{n-k}\}$ も $\mathbb{C}^n$ において 1 次独立である．この集合にグラム–シュミットの直交化を行って得られる規格直交系を $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-k}\}$ とし，これを含む $\mathbb{C}^n$ における規格直交基底を $\{\boldsymbol{b}_\ell \mid \ell \in I\}$ とする．外積は多重線形であるから，仮定により，$\ell = 1, \ldots, n-k$ に対して，$(J\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{b}_\ell = \boldsymbol{0}$ となる．$n-k$ ベクトル $J\boldsymbol{x}$ は

$$\sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_{n-k} \le n} b_{j_1, \ldots, j_{n-k}} \boldsymbol{b}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_{j_{n-k}}$$

と表せる．補題 3.2.9 により，$(J\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{b}_\ell$ の展開式で，添え字 $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$ が

ℓを含むかどうかにより，$\boldsymbol{b}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{b}_{j_{n-k}}\wedge\boldsymbol{b}_\ell$ は，零ベクトルか零ベクトルでないかが決まるので，零ベクトルでないものの集合は，各 $\ell\in\{1,\ldots,n-k\}$ ごとに，$\{\boldsymbol{b}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{b}_{j_{n-k}}\wedge\boldsymbol{b}_\ell\mid\ell\notin\{j_1,\ldots,j_{n-k}\}\}$ と表せ，その集合は1次独立である．ゆえに，その展開係数 $b_{j_1,\ldots,j_{n-k}}$ の値は0でなければならない．よって，展開係数 $b_{j_1,\ldots,j_{n-k}}$ で0でないのは，添え字が

$$\left(\bigcup_{\ell=1}^{n-k}\{d\in\mathscr{C}^I_{n-k}\mid\ell\notin d\}\right)^c=\bigcap_{\ell=1}^{n-k}\{d\in\mathscr{C}^I_{n-k}\mid\ell\in d\}=\{1,\ldots,n-k\}$$

の場合，つまり，$\{j_1,\ldots,j_{n-k}\}$ が $\{1,\ldots,n-k\}$ の場合に限られるので，$J\boldsymbol{x}=b_{1,\ldots,n-k}\boldsymbol{b}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{b}_{n-k}$．ゆえに，$J\boldsymbol{x}$ は分解可能である．よって，定理3.2.11の(v)により，k ベクトル $\boldsymbol{x}$ も分解可能である． ■

3.3 グラスマン代数への線形作用

グラスマン代数に作用する線形変換として，前半では，フェルミ場や位相幾何でよく使われる，生成作用素と消滅作用素の説明をし，これらの線形変換が行列の列数の増減にともなう行列式の値の計算にも有用であることを示す．後半では，2.5.2項で説明した，交代冪行列がグラスマン代数への Γ 作用を用いて自然に書き直せることを説明し，その結果を用いて，交代冪行列の基本的な性質を調べる．最後に，Cullis行列式をグラスマン代数を使って書き直すことにより，第2章において証明したラプラス展開を初めとするいろいろな展開式が，実はCullis基底に関する直交展開になっていることを示す．内容的に新たな展開が導かれるわけではないが，Cullis基底を用いることにより，その幾何学的描像を汲み取ることができる．

3.3.1 生成作用素と消滅作用素

ここでこれから説明する作用素は，行列の列ベクトルの個数を増やしたり減らしたりする場合に利用される．

基本性質

グラスマン代数 $\bigwedge \mathbb{C}^n$ は $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ 次元の内積空間である．この空間上には，各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して，

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{x})\Omega &= \boldsymbol{x}, \\ a(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) &= \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ a(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n) &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

を満たす線形変換 $a(\boldsymbol{x})$ が存在する．このとき，a はベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ からベクトル空間 $\mathscr{L}(\bigwedge \mathbb{C}^n)$ への線形変換であることがわかる．

補題 3.3.1　線形変換 $a(\boldsymbol{x})$ の随伴変換はつぎの式を満たす．

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{x})^*\Omega &= \boldsymbol{0}, \\ a(\boldsymbol{x})^*\boldsymbol{x}_1 &= (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_1)\Omega, \\ a(\boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_i)\, \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{x}_i} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k. \end{aligned}$$

ただし，$\widehat{\boldsymbol{x}_i}$ は $\boldsymbol{x}_i$ を取り除くという意味である．

証明　$a(\boldsymbol{x})$ は各 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ から $\bigwedge^{k+1} \mathbb{C}^n$ への線形変換であるから，その随伴は $\bigwedge^{k+1} \mathbb{C}^n$ から $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ への変換である．$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{y}_{j-1}$ $(j = 2, \ldots, k)$ とし，k 次正方行列 $((\boldsymbol{z}_i|\boldsymbol{x}_j))$ の転置行列の第 1 列に関する展開を用いると，

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_{k-1} | a(\boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)) \\ =&(a(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_{k-1}) | \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) \\ =&(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_{k-1} | \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) \\ =&\det{}_k((\boldsymbol{z}_i|\boldsymbol{x}_j)) = \det{}_k((\boldsymbol{z}_j|\boldsymbol{x}_i)) \\ =&\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} (\boldsymbol{z}_1|\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{z}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{z}_k | \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{x}_i} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) \\ =&\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_{k-1} | \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{x}_i} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

補題 3.3.2 これらの線形変換はつぎの関係式を満たす.

$$a(\boldsymbol{x})a(\boldsymbol{y}) + a(\boldsymbol{y})a(\boldsymbol{x}) = 0, \quad a(\boldsymbol{x})^* a(\boldsymbol{y})^* + a(\boldsymbol{y})^* a(\boldsymbol{x})^* = 0,$$
$$a(\boldsymbol{x})^* a(\boldsymbol{y}) + a(\boldsymbol{y})a(\boldsymbol{x})^* = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})1.$$

証明 最初の2つの式は線形変換 $a(\boldsymbol{x})$, $a(\boldsymbol{x})^*$ の定義から明らかであるから, 3番目の式を示す.

$$\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{x})^* a(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) = a(\boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) \\
=&(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})\, \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k \\
&+ \sum_{i=1} (-1)^i (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_i)\, \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{x}_i} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k \\
=&(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})\, \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k \\
&- a(\boldsymbol{y}) \sum_{i=1} (-1)^{i+1} (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_i)\, \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{x}_i} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k \\
=&(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})\, \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k - a(\boldsymbol{y})a(\boldsymbol{x})^*(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k).
\end{aligned}$$

■

この項のここまでの議論は内積空間が無限次元[7]の場合にも同じように展開することができ, 補題 3.3.2 で得られた関係式は正準**反交換関係**, 線形変換 $a(\boldsymbol{x})$, $a(\boldsymbol{x})^*$ はそれぞれ**生成作用素**, **消滅作用素**と呼ばれている[8]. その際, 分解可能 k ベクトルは k 個の同一フェルミ粒子の状態を記述しているものと解釈される.

問題 56 k 重外積冪 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ 上で, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ が単位ベクトルならば,

$$Ja(\boldsymbol{v})J^* = (-1)^{kn+1} a(\boldsymbol{v})^*$$

が成り立つことを示せ.

これらの作用素は広範な応用をもっている. 3.5 節へ行ってから, 一般逆行列に関する議論にも利用する予定であるが, つぎの命題の証明にも利用できる.

---

[7] 無限次元ヒルベルト空間.
[8] 物理では作用素を演算子といい, 生成, 消滅演算子をそれぞれ, $a^\dagger(\boldsymbol{x}), a(\boldsymbol{x})$ で表す.

プリュッカー座標

k 重テンソル積 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ には，自然基底により定まる自然な座標

$$x_{i_1,\dots,i_k} = (\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_k} | \boldsymbol{x}) \qquad (i_1,\dots,i_k) \in I^k$$

がある．この座標を用いて，部分ベクトル空間である k 重外積冪 $A_k(\mathbb{C}^n)^{\otimes k} = \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の元を記述し，それに $\sqrt{k!}$ 倍したものを，$\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ におけるプリュッカー座標[9]という．つまり，$\boldsymbol{x} \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ のプリュッカー座標は，

$$p_{i_1,\dots,i_k} = \sqrt{k!}\, x_{i_1,\dots,i_k} \qquad (i_1,\dots,i_k) \in I^k$$

である．また，この k ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $A_k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たすので，

$$p_{i_1,\dots,i_k} = \sqrt{k!}\,(A_k(\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_k})|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}|\boldsymbol{x})$$

とも表せる．したがって，この座標は，各 $(i_1,\dots,i_k) \in I^k$ に対して，

$$p_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k)}} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, p_{i_1,\dots,i_k} \quad (\sigma \in S_k)$$
$$p_{i_1,\dots,i_k} = 0 \quad (i_\alpha = i_\beta\ (\alpha \neq \beta))$$

を満たしている．

詳しいことは付録 A で説明するが，つぎの命題の式をプリュッカー座標で読み直したものがプリュッカーの関係式である．

命題 3.3.3　$1 < k < n$ に対し，X を $n \times k$ 行列とする．任意の $k-1$ ベクトル $\boldsymbol{y}$ と，任意の $d \in \mathscr{C}^I_{k+1}$ と，その元を小さい順に並べたものを $j_1,\dots,j_{k+1}$ とすると，

$$\sum_{\ell=1}^{k+1} (-1)^{\ell-1} (\boldsymbol{e}_{j_\ell} \wedge \boldsymbol{y} \mid \pi_k(X))(\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{d\setminus\{j_\ell\}} \mid \pi_k(X)) = 0.$$

証明　$n \times k$ 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_k)$ と $k-1$ ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して，写像 $f : \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n \mapsto (\pi_k(X)|\boldsymbol{z} \wedge \boldsymbol{y}) \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}^n$ 上の線形汎関数であるから，$f(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ が存在する．ゆえに，

[9] プリュッカー座標は射影幾何における同次座標として使われることが多く，その場合には座標の各成分に同一の零でない定数を掛けたものも同一の点と見なす．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{y} \mid \pi_k(X))\boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{y} \mid \pi_k(X))\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y} \mid a(\boldsymbol{e}_i)^*\pi_k(X))\boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}(\boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{x}_j)(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{x}_j} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{x}_j} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{x}_j \in X\mathbb{C}^k.\end{aligned}$$

つぎに，$k+1$ 次正方行列 $E_d^*(\boldsymbol{x}, X)$ の行列式を第 1 列に関して展開すると，

$$\begin{aligned}0 &= \det{}_{k+1}(E_d^*(\boldsymbol{x}, X)) = \sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{\ell-1}(\boldsymbol{e}_{j_\ell} \mid \boldsymbol{x}) \det{}_k(E_{d\setminus\{j_\ell\}}^* X) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{\ell-1}(\boldsymbol{e}_{j_\ell} \mid \boldsymbol{x})(\widetilde{\boldsymbol{e}}_{d\setminus\{j_\ell\}}^I \mid \pi_k(X)) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{\ell-1}(\boldsymbol{e}_{j_\ell} \wedge \boldsymbol{y} \mid \pi_k(X))(\widetilde{\boldsymbol{e}}_{d\setminus\{j_\ell\}}^I | \pi_k(X)).\end{aligned}$$

よって，求める式が得られた．■

境界作用素

実グラスマン代数 $\bigwedge \mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ において，k ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k$ が零ベクトルでない場合には，2.4 節の例 2.4.14 の直前で説明した $k-1$ 単体に，向き（符号）を付けた，対応物と解釈することができる．複素グラスマン代数 $\bigwedge \mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の場合にも，このことを念頭に話を進める．

命題 3.3.4　余 Cullis ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{1}}^{(1)}$ の消滅作用素 $a(\widetilde{\boldsymbol{1}}^{(1)})^*$ は境界作用素の役割

$$(a(\widetilde{\boldsymbol{1}}^{(1)})^*)^2(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

を果たしている．

証明　$k=1$ のときは，

$$(a(\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})^*)^2\boldsymbol{x} = (\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}|\boldsymbol{x})a(\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})^*\Omega = \mathbf{0}.$$

$k \geq 2$ の場合には，任意の分解可能な $k-2$ ベクトル $\boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_{k-2}$ に対して，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_{k-2}|(a(\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})^*)^2(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k))\\ =&(\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)} \wedge \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)} \wedge \boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_{k-2}|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) = 0.\end{aligned}$$

任意の $k-2$ ベクトルは分解可能な $k-2$ ベクトルの 1 次結合で表せるから，$(a(\widetilde{\mathbf{1}})^*)^2(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) = \mathbf{0}$. ■

したがって，$a(\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})^*$ を $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ へ制限したものを ∂_{k-1} とすれば，系列

$$\bigwedge^n \mathbb{C}^n \xrightarrow{\partial_{n-1}} \bigwedge^{n-1} \mathbb{C}^n \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} \bigwedge^2 \mathbb{C}^n \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{C}^n \xrightarrow{\partial_0} \{\mathbf{0}\}$$

が得られる．$X \in M_n(\mathbb{C})$ の場合には

$$\partial_{n-1}\pi_n(X) = \det{}_n(X)\partial_{n-1}\pi_n(1_n) = \det{}_n(X)\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\pi_{n-1}(E_{I\setminus\{i\}}).$$

この式を Cullis 基底の場合で考えてみると，$\mathrm{sgn}_I(I\setminus\{i\}) = (-1)^{\sum_{\ell=i+1}^{n}1} = (-1)^{n-i}$ かつ $\mathbf{1}^{(n)} = \boldsymbol{e}_I^I$ であるから，

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}\mathbf{1}^{(n)} &= \partial_{n-1}(\boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(\boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{e}}_i \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus\{i\}}^I\\ &= (-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{e}_{I\setminus\{i\}}^I = (-1)^{n-1}\mathbf{1}^{(n-1)}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

この計算は系 2.5.3 を用いると，つぎのように一般化することができる．

命題 3.3.5　$1 < k \leq n$ とする．このとき，Cullis ベクトルに対し，

$$\partial_{k-1}\mathbf{1}^{(k)} = \begin{cases} (-1)^{k-1}\mathbf{1}^{(k-1)} & (n-k：偶数)\\ \mathbf{0} & (n-k：奇数)\end{cases}.$$

証明　X を $n \times (k-1)$ 行列とする．$n-k$ が偶数のとき，

$$(\partial_{k-1}\mathbf{1}^{(k)}|\pi_{k-1}(X))$$

$$
\begin{aligned}
&=(a(\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})^*\mathbf{1}^{(k)}|\pi_{k-1}(X)) = (\mathbf{1}^{(k)}|a(\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})\pi_{k-1}(X)) \\
&=(\mathbf{1}^{(k)}|\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)} \wedge \pi_{k-1}(X)) = (-1)^{k-1}(\mathbf{1}^{(k)}|\pi_{k-1}(X) \wedge \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}) \\
&=(-1)^{k-1} \det{}_{n,k}((X, \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})).
\end{aligned}
$$

ここで，系 2.5.3 を用いると，右辺は

$$
\begin{cases}
(-1)^{k-1} \det{}_{n,k-1}(X) = (-1)^{k-1}(\mathbf{1}^{(k-1)}|\pi_{k-1}(X)) & (n-k：偶数) \\
\mathbf{0} & (n-k：奇数)
\end{cases}
$$

が任意の分解可能 $k-1$ ベクトル $\pi_{k-1}(X)$ に対して成り立つ．よって，命題が示された． ■

つぎの命題で $k=n-1$ の場合は，$n \times k$ 行列の行列式の値の絶対値が最大になる，命題 3.4.6，定理 3.5.14 の各条件とも同値である．

命題 3.3.6　$1<k<n$ とする．非退化な $n \times k$ 行列 X に対して，つぎの 2 条件は同値である．

(i) $\partial_{k-1}\pi_k(X) = \mathbf{0}$.

(ii) $\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)} \in (X\mathbb{C}^k)^\perp$.

証明　行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\partial_{k-1}\pi_k(X) &= a(\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})^*(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}(\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}|\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{x}_i} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

したがって，主張 (ii) を仮定すると，右辺が零ベクトルになるので，主張 (i) が成り立つ．逆に，X が非退化ならば，$\pi_k(X) \neq \mathbf{0}$．ここで，各 $i=1,\ldots,k$ に対して，

$$
\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{x}_i} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k
$$

とすれば，集合 $\{\boldsymbol{b}_i \mid i=1,\ldots,k\}$ は 1 次独立である．実際，$\sum_{j=1}^{k} c_j\boldsymbol{b}_j = \mathbf{0}$ ならば，

$$
c_i\pi_k(X) = (-1)^{i-1}\boldsymbol{x}_i \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{b}_j\right) = \mathbf{0}
$$

となるので，$c_i = 0$ $(i = 1, \dots, k)$．ゆえに，(3.21) 式の左辺が $\mathbf{0}$ ならば，右辺の展開式の係数も 0 になる．したがって，任意の $i = 1, \dots, k$ に対して，$(\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}|\boldsymbol{x}_i) = 0$．ゆえに，主張 (i) が成り立てば，主張 (ii) も成り立つ．■

3.3.2　$\varGamma$ 作用と交代冪行列

2.5.2 項で説明した交代冪行列を，これから説明するグラスマン代数上の $\varGamma$ 作用を用いて書き直すと，議論の見通しもよく，取り扱いもしやすくなるので，その説明をする．このような書き換えの結果は，4.1 節へ行ってから，行列式の左乗法性を議論する際に利用される．

まず線形変換のテンソル積に関する記号の準備から始める．$B_i \in M_{n_i,\ell_i}(\mathbb{C})$ $(i = 1, \dots, k)$ に対して，写像

$$(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k) \in \mathbb{C}^{\ell_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{\ell_k} \longmapsto B_1\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes B_k\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_k}$$

は k 重線形変換である．したがって，定理 3.1.5 により，ベクトル空間 $\mathbb{C}^{\ell_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{\ell_k}$ からベクトル空間 $\mathbb{C}^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_k}$ への線形変換 F で

$$F(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k) = B_1\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes B_k\boldsymbol{x}_k$$

を満たすものが一意的に存在する．そこで，この F を $B_1 \otimes \cdots \otimes B_k$ で表す．

とくに，$\mathbb{C}^{n_j} = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{\ell_j} = \mathbb{C}^\ell$, $B_j = B \in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$ $(j = 1, \dots, k)$ のときには，この F を $B^{\otimes k}$ で表す．これを用いて，ベクトル空間 $\mathbb{C}\varOmega \oplus \mathbb{C}^\ell \oplus \cdots \oplus (\mathbb{C}^\ell)^{\otimes m}$ からベクトル空間 $\mathbb{C}\varOmega \oplus \mathbb{C}^n \oplus \cdots \oplus (\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$ への線形変換を

$$c\varOmega \oplus \boldsymbol{z}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{z}_m \longmapsto c\varOmega \oplus B\boldsymbol{z}_1 \oplus \cdots \oplus (B^{\otimes m})\boldsymbol{z}_m$$

により定め，これを $1 \oplus B \oplus \cdots \oplus B^{\otimes m}$ で表す．つぎに，ベクトル空間の各直和因子である j 重テンソル積 $(\mathbb{C}^\ell)^{\otimes j}$ と $(\mathbb{C}^n)^{\otimes j}$ を交代化する．

行列 $B \in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$ と各 $j = 1, \dots, \max\{\ell, n\}$ に対して，$(\mathbb{C}^\ell)^{\otimes j}$ から $(\mathbb{C}^n)^{\otimes j}$ への線形変換 $B^{\otimes j}$ と (3.12) 式で与えた j 重外積冪への射影 A_j に対して，

$$A_j(B^{\otimes j}(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_j)) = A_j(B\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes B\boldsymbol{x}_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{j\,!} \sum_{\sigma\in S_j} \mathrm{sgn}(\sigma) B\boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes B\boldsymbol{x}_{\sigma(j)} \\
&= \frac{1}{j\,!} B^{\otimes j} \sum_{\sigma\in S_j} \mathrm{sgn}(\sigma) \boldsymbol{x}_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_{\sigma(j)} \\
&= B^{\otimes j}(A_j(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_j))
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって，線形変換 $B^{\otimes j}$ は，$\mathbb{C}^\ell$ の j 重外積冪を $\mathbb{C}^n$ の j 重外積冪へ移すことがわかる．そこで，この線形変換 $B^{\otimes j}$ を $\mathbb{C}^\ell$ の j 重外積冪に制限して得られる，$\bigwedge^j \mathbb{C}^\ell$ から $\bigwedge^j \mathbb{C}^n$ への線形変換を $\Gamma(B)$ で表す．ただし，j が $j \le \max\{\ell, n\}$ を満たさない場合には，上の 2 つの外積冪はともに $\{\mathbf{0}\}$ になるので，この不等式を満たしている場合だけが実質的な意味をもつ．

また，$\Gamma(B)$ の随伴作用素 $\Gamma(B)^* : \bigwedge^j \mathbb{C}^n \to \bigwedge^j \mathbb{C}^\ell$ は，補題 3.1.10 により，任意の $j \le \max\{\ell, n\}$ に対して，条件

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_j | \Gamma(B)(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_j)) \\
=&\det{}_j(((\boldsymbol{y}_\alpha | B\boldsymbol{x}_\beta))) = \det{}_j(((B^*\boldsymbol{y}_\alpha | \boldsymbol{x}_\beta))) \\
=&(\Gamma(B^*)(\boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_j) | \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_j)
\end{aligned}
$$

を満たす．ただし，$((\boldsymbol{y}_\alpha | B\boldsymbol{x}_\beta))$ と $((B^*\boldsymbol{y}_\alpha | \boldsymbol{x}_\beta))$ は j 次正方行列である．とくに，$\ell < j \le n$ の場合には，B^* の階数はたかだか ℓ 以下であるから，

$$
\Gamma(B^*)(\boldsymbol{y}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_j) = \mathbf{0}
$$

となっている．したがって，

$$
\Gamma(B)^* = \Gamma(B^*) \tag{3.22}
$$

と表せる．さらに，$k \le \ell \le n$ で $B_1 \in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$, $B_2 \in M_{\ell,k}(\mathbb{C})$ の場合には，

$$
\Gamma(B_1 B_2) = \Gamma(B_1)\Gamma(B_2) \tag{3.23}
$$

が成り立つ．

とくに，$\ell = n$ の場合には，ベクトル空間 $\mathbb{C}\Omega \oplus \mathbb{C}^n \oplus \cdots \oplus (\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ の上の線形変換 $1 \oplus B \oplus \cdots \oplus B^{\otimes n}$ は，その部分ベクトル空間 $\bigwedge \mathbb{C}^n$ を不変にしているので，その線形変換を $\bigwedge \mathbb{C}^n$ へ制限することにより，グラスマン代数 $\bigwedge \mathbb{C}^n$ 上の線形変換が存在する．これも上と同じ記号 $\Gamma(B)$ を使って表す

と[10],

$$\Gamma(B)(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_j) = B\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge B\boldsymbol{x}_j \quad (j = 1, \ldots, n),$$
$$\Gamma(B)\Omega = \Omega$$

となる．以後，このような変換 $\Gamma(B)$ を線形変換 B のグラスマン代数 $\bigwedge \mathbb{C}^n$ への $\boldsymbol{\Gamma}$ **作用**と呼ぶ．

つぎに，$1 \leq k \leq \ell \leq n$ の場合に，2.5.2 項で説明した，$n \times \ell$ 行列 X に対する k 次交代冪行列 $\widetilde{X}^{(k)}$ の行列成分は，X の Γ 作用 $\Gamma(X)$ の余 Cullis 基底 $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c \mid c \in \mathscr{C}^I_k\}$ と $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}^L_d \mid d \in \mathscr{C}^L_k\}$ に関する行列成分と一致していることを示す．

補題 3.3.7　$1 \leq k \leq \ell \leq n$ とする．X を $n \times \ell$ 行列とする．$c \in \mathscr{C}^I_k$ と $d \in \mathscr{C}^L_k$ に対して，

$$\widetilde{X}^{(k)}_{c,d} = (\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c | \Gamma(X)\widetilde{\boldsymbol{e}}^L_d).$$

証明　$d \in \mathscr{C}^L_k$ に対して，$XE^L_d \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ である．d の元を小さい順に並べたものを $j_1, \ldots, j_k$ とすると，$XE^L_d = (X\boldsymbol{e}^L_{j_1}, \ldots, X\boldsymbol{e}^L_{j_k})$ となる．したがって，補題 3.1.10 により，任意の $c \in \mathscr{C}^I_k$ に対して，

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^{(k)}_{c,d} &= \det{}_k(E^*_c X E^L_d) = (\pi_k(E_c)|\pi_k(XE^L_d)) \\
&= (\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c | X\boldsymbol{e}^L_{j_1} \wedge \cdots \wedge X\boldsymbol{e}^L_{j_k}) = (\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c | \Gamma(X)(\boldsymbol{e}^L_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^L_{j_k})) \\
&= (\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c | \Gamma(X)\widetilde{\boldsymbol{e}}^L_d).
\end{aligned}$$
■

したがって，(3.22) 式と (3.23) 式により，$1 \leq m \leq k \leq \ell \leq n$ かつ $X \in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$, $Y \in M_{\ell,k}(\mathbb{C})$ ならば，それらの m 次交代冪行列に対して，

$$(\widetilde{X}^{(m)})^* = \widetilde{X^*}^{(m)}, \quad \widetilde{X}^{(m)}\widetilde{Y}^{(m)} = \widetilde{XY}^{(m)} \tag{3.24}$$

が成り立つ．

この補題 3.3.7 を用いると，正則な正方行列 T に対応する k 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(k)}$ の逆行列の計算が容易にできる．

---
[10] I.E. Segal により使われ始めた記号である．

定理 3.3.8　X を n 次正方行列とする.

(i) X が正則であることと，k 次交代冪行列 $\widetilde{X}^{(k)}$ が正則であることは必要十分であり，$\widetilde{X}^{(k)}\widetilde{X^{-1}}^{(k)}=1$ が成り立つ.

(ii) X が自己随伴かユニタリか射影ならば，$\widetilde{X}^{(k)}$ もそれぞれ自己随伴かユニタリか射影である.

(iii) $U\in U(n)$ ならば，$\mathrm{Tr}_{\bigwedge^k\mathbb{C}^n}\left(\widetilde{U^*XU}^{(k)}\right)=\mathrm{Tr}_{\bigwedge^k\mathbb{C}^n}\left(\widetilde{X}^{(k)}\right)$．ただし，$\mathrm{Tr}_{\bigwedge^k\mathbb{C}^n}$ は k 重外積冪 $\bigwedge^k\mathbb{C}^n$ 上のトレイスである.

(iv) $P\in\mathrm{Proj}^{\ell}(\mathbb{C}^n)$ に対する射影 $\widetilde{P}^{(k)}$ の次元は，ℓ が $\ell<k$ のときは 0，$k\le\ell\le n$ のときは，$\binom{\ell}{k}$ である．とくに，$\ell=k$ のときは $\widetilde{P}^{(k)}=\pi(P)$.

証明　(i) 定理 2.5.8 において，X が正則でなければ，k 次交代冪行列 $\widetilde{X}^{(k)}$ も正則でないことを示した．X が正則ならば，(3.24) 式により，

$$\widetilde{X}^{(k)}\widetilde{X^{-1}}^{(k)}=\widetilde{XX^{-1}}^{(k)}=\widetilde{1}^{(k)}=1.$$

(ii) (3.24) 式より直接わかる.

(iii) (3.24) 式により，$U\in M_n(\mathbb{C})$ がユニタリならば，$\widetilde{U^*}^{(k)}=(\widetilde{U}^{(k)})^*$ が成り立つ．ゆえに，

$$\mathrm{Tr}_{\bigwedge^k\mathbb{C}^n}\left(\widetilde{U^*XU}^{(k)}\right)=\mathrm{Tr}_{\bigwedge^k\mathbb{C}^n}\left((\widetilde{U}^{(k)})^*\widetilde{X}^{(k)}\widetilde{U}^{(k)}\right)=\mathrm{Tr}_{\bigwedge^k\mathbb{C}^n}\left(\widetilde{X}^{(k)}\right).$$

(iv) $VV^*=P$ を満たす $n\times\ell$ 等長行列 V を用いる．$\ell<k$ の場合には，どの $c,d\in\mathscr{C}_k^I$ に対しても，$E_c^*PE_d$ の階数は k より小さいから，$\widetilde{P}_{c,d}^{(k)}=0$ となり，$\widetilde{P}^{(k)}=0$ である．そこで，$k\le\ell\le n$ の場合を考える.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}_{\bigwedge^k\mathbb{C}^n}\left(\widetilde{P}^{(k)}\right)\\
&=\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}(\widetilde{e}_c^I|\Gamma(VV^*)\widetilde{e}_c^I)=\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\sum_{d\in\mathscr{C}_k^L}(\Gamma(V^*)\widetilde{e}_c^I|\widetilde{e}_d^L)(\widetilde{e}_d^L|\Gamma(V^*)\widetilde{e}_c^I)\\
&=\sum_{d\in\mathscr{C}_k^L}\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}(\Gamma(V)\widetilde{e}_d^L|\widetilde{e}_c^I)(\widetilde{e}_c^I|\Gamma(V)\widetilde{e}_d^L)=\sum_{d\in\mathscr{C}_k^L}(\Gamma(V)\widetilde{e}_d^L|(\Gamma(V)\widetilde{e}_d^L)\\
&=\sum_{d\in\mathscr{C}_k^L}(\widetilde{e}_d^L|(\Gamma(V^*V)\widetilde{e}_d^L)=\sum_{d\in\mathscr{C}_k^L}(\widetilde{e}_d^L|(\Gamma(1_\ell)\widetilde{e}_d^L)=\binom{\ell}{k}.
\end{aligned}$$

さらに，$\ell = k$ の場合には，任意の $c, d \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，

$$(\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|\widetilde{P}^{(k)}\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I) = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|\Gamma(VV^*)\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I) = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|\Gamma(V)\boldsymbol{e}_K^K)(\Gamma(V)\boldsymbol{e}_K^K|\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I)$$
$$= (\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|\pi_k(V))(\pi_k(V)|\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I) = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|(\pi_k(V)|\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I)\pi_k(V)) = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|\pi(P)\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I). \quad \blacksquare$$

この定理により，n 次正方行列 X が自己随伴の場合，1.5.4 項末で説明した固有多項式の係数 α_k は，X の（重複も込めた）固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を用いて，$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$ で与えられる．

3.3.3　Cullis 基底を用いた別証明

グラスマン代数を用いると，行列式のラプラス展開や右乗法性に関する議論が，Cullis 基底や余 Cullis 基底による直交展開として，簡潔に記述できることを示す．

ラプラス展開

定理 2.4.10 において，矩形行列のラプラス展開を示したが，その内容をグラスマン代数の立場から見ると，Cullis 基底に関する直交展開の応用と考えられる．そこで，この立場からの別証明を与えておく．正方行列は矩形行列の特別な場合であるが，このときは証明がとくに簡単になるので，この場合から始めよう．

まず，定理 2.4.10 において，n 次複素正方行列（また定理 1.3.15 において，実正方行列）(X_1, X_2) に対して，つぎのことを示した．

$X_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C})$, $X_2 \in M_{n,n-k}(\mathbb{C})$ に対して，

$$\det{}_n((X_1, X_2)) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det{}_{n,k}(P_c X_1) \det{}_{n-k}(E_{I\setminus c}^* X_2).$$

ここでは，その別証明を与える．

証明　$X_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C})$, $X_2 \in M_{n,n-k}(\mathbb{C})$ に対して，定理 3.2.8 を用いると，

$$\det{}_n((X_1, X_2)) = (J\pi_k(X_1)|\pi_{n-k}(X_2))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} (J\pi_k(X_1)|\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c})(\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c}|\pi_{n-k}(X_2)) \\
&= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} (\boldsymbol{e}^I_c|\pi_k(X_1))(\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c}|\pi_{n-k}(X_2)) \\
&= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \det{}_{n,k}(P_cX_1)\det{}_{n-k}(E^*_{I\setminus c}X_2).
\end{aligned}
$$

ただし，3 番目の等号では，J が反ユニタリであることと補題 3.2.9 の (i) を，4 番目の等号では，定理 3.2.5 と補題 3.1.10 を使っている． ■

問題 57 4×2 行列 $X=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$ に対して，つぎのプリュッカーの関係式[11]を示せ．

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{\{1,2\}}|\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2)(\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{\{3,4\}}|\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2) - (\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{\{1,3\}}|\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2)(\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{\{2,4\}}|\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2)& \\
+ (\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{\{1,4\}}|\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2)(\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{\{2,3\}}|\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2) &= 0.
\end{aligned}
$$

つぎに，一般の矩形行列の場合の定理 2.4.10 の別証明に移るが，この証明は簡単にはなっていない．

> $1\le k<\ell\le n$ とする．$X_1\in M_{n,k}(\mathbb{C})$, $X_2\in M_{n,\ell-k}(\mathbb{C})$ に対して，
>
> $$\det{}_{n,\ell}((X_1,X_2)) = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\det{}_{n,k}(P_cX_1)\det{}_{n-k,\ell-k}(E^*_{I\setminus c}X_2).$$

証明 定理 2.4.4 により，

$$
\begin{aligned}
\det{}_{n,\ell}((X_1,X_2)) &= \sum_{e\in\mathscr{C}^I_{n-\ell}} \det{}_n((X_1,X_2,E_e)) \\
&= \sum_{e\in\mathscr{C}^I_{n-\ell}} (\boldsymbol{e}^I_I|\pi_k(X_1)\wedge\pi_{\ell-k}(X_2)\wedge\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_e)
\end{aligned}
$$

と表せる．ただし，2 番目の等号は補題 3.1.10 による．そこで，2 つの直交展開

$$\pi_k(X_1) = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}(\boldsymbol{e}^I_c|\pi_k(X_1))\boldsymbol{e}^I_c = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\det{}_{n,k}(P_cX_1)\boldsymbol{e}^I_c,$$

[11] 実行列の場合には，5 次元実射影空間における，ある 2 次曲面を表す方程式である．

$$\pi_{\ell-k}(X_2) = \sum_{d\in\mathscr{C}^I_{\ell-k}} (\boldsymbol{e}^I_d|\pi_{\ell-k}(X_2))\boldsymbol{e}^I_d = \sum_{d\in\mathscr{C}^I_{\ell-k}} \det{}_{n,\ell-k}(P_dX_2)\boldsymbol{e}^I_d$$

を上の式の右辺に代入すると，行列式 $\det{}_{n,\ell}((X_1,X_2))$ は

$$\sum_{c\in\mathscr{C}^I_k}\sum_{d\in\mathscr{C}^I_{\ell-k}}\sum_{e\in\mathscr{C}^I_{n-\ell}} \det{}_{n,k}(P_cX_1)\det{}_{n,\ell-k}(P_dX_2)(\boldsymbol{e}^I_I|\boldsymbol{e}^I_c\wedge\boldsymbol{e}^I_d\wedge\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_e)$$

と展開される．ここで，添え字の集合 c,d,e のいずれか 2 つの集合の共通部分が空でなければ，$\boldsymbol{e}^I_c\wedge\boldsymbol{e}^I_d\wedge\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_e=\boldsymbol{0}$ となるので，この和のうち，c,d,e が互いに共通部分をもたない場合だけが生き残る．よって，$d\subset I\setminus c$ となり，上の展開式は

$$\sum_{c\in\mathscr{C}^I_k}\sum_{d\in\mathscr{C}^{I\setminus c}_{\ell-k}} \det{}_{n,k}(P_cX_1)\det{}_{n,\ell-k}(P_dX_2)(\boldsymbol{e}^I_I|\boldsymbol{e}^I_c\wedge\boldsymbol{e}^I_d\wedge\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus(c\cup d)})$$

と表せる．

ここで，I の部分集合 $I\setminus c$ における符号は，定義 1.4.14 により，$I\setminus c$ から $\{1,2,\ldots,n-k\}$ への，大小関係を保存する全単射 ρ を用いて，

$$\mathrm{sgn}_{I\setminus c}(d) = \mathrm{sgn}_{\{1,2,\ldots,n-k\}}(\rho(d)) \quad (d\in\mathscr{C}^{I\setminus c}_{\ell-k})$$

により与えられる．したがって，補題 2.4.9 の証明と同じようにして，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^I_c\wedge\boldsymbol{e}^I_d\wedge\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus(c\cup d)} &= \mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_I(d)\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c\wedge\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_d\wedge\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus(c\cup d)}\\ &= \mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_I(d)\mathrm{sgn}_{I\setminus c}(d)\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c\wedge\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus c}\\ &= \mathrm{sgn}_I(d)\mathrm{sgn}_{I\setminus c}(d)\boldsymbol{e}^I_I\end{aligned}$$

となる．

また，各 $d\in\mathscr{C}^{I\setminus c}_{\ell-k}$ に対して，変換 $E^*_{I\setminus c}P_dE_{I\setminus c}$ は，$n-k$ 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^{n-k}$ の自然基底 $\{\boldsymbol{e}'_1,\ldots,\boldsymbol{e}'_{n-k}\}$ に対して，部分集合 $\{\boldsymbol{e}'_j \mid j\in\rho(d)\}$ の張る部分ベクトル空間への射影である．これを $P'_{\rho(d)}\in M_{n-k}(\mathbb{C})$ とすると，定理 2.4.4 により，

$$\begin{aligned}&\det{}_{n-k,\ell-k}(E^*_{I\setminus c}X_2)\\ &= \sum_{d'\in\mathscr{C}^{\{1,\ldots,n-k\}}_{\ell-k}} \det{}_{n-k,\ell-k}(P'_{d'}E^*_{I\setminus c}X_2)\end{aligned}$$

$$= \sum_{d' \in \mathscr{C}_{\ell-k}^{\{1,\ldots,n-k\}}} \mathrm{sgn}_{\{1,\ldots,n-k\}}(d') \det{}_{\ell-k}((E_{d'}^{\{1,\ldots,n-k\}})^* E_{I\setminus c}^* X_2).$$

ここで，$d \in \mathscr{C}_{\ell-k}^{I\setminus c}$ の元を小さい順に並べたものを $j_1, \ldots, j_{\ell-k}$ とすると，各 $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{C}^{\ell-k}$ $(i \in \{1, \ldots, \ell-k\})$ に対して，

$$E_{\rho(d)}^{\{1,\ldots,n-k\}} \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{\rho(j_i)} \in \mathbb{C}^{n-k}, \quad E_{I\setminus c} \boldsymbol{e}_{\rho(j_i)} = \boldsymbol{e}_{j_i} \in \mathbb{C}^n, \quad E_d \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{j_i}$$

となるので，$E_{I\setminus c} E_{\rho(d)}^{\{1,\ldots,n-k\}} = E_d$．ゆえに，

$$\begin{aligned}
&\det{}_{n-k,\ell-k}(E_{I\setminus c}^* X_2)\\
&= \sum_{d' \in \mathscr{C}_{\ell-k}^{\{1,\ldots,n-k\}}} \mathrm{sgn}_{\{1,\ldots,n-k\}}(d') \det{}_{\ell-k}(E_{\rho^{-1}(d')}^* X_2)\\
&= \sum_{d \in \mathscr{C}_{\ell-k}^{I\setminus c}} \mathrm{sgn}_{I\setminus c}(d) \det{}_{\ell-k}(E_d^* X_2)\\
&= \sum_{d \in \mathscr{C}_{\ell-k}^{I\setminus c}} \mathrm{sgn}_{I\setminus c}(d) \mathrm{sgn}_I(d) \det{}_{n,\ell-k}(P_d X_2)
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\det{}_{n,\ell}((X_1, X_2)) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det{}_{n,k}(P_c X_1) \det{}_{n-k,\ell-k}(E_{I\setminus c}^* X_2). \qquad \blacksquare$$

問題 58　2 つの $n \times k$ 行列 X, Y に対して，つぎの式を示せ．

$$\begin{aligned}
\det{}_k(X^* Y) &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \overline{\det{}_{n,k}(P_c X)} \det{}_{n,k}(P_c Y)\\
&= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \overline{\mathrm{Det}_{n,k}(P_c X)} \mathrm{Det}_{n,k}(P_c Y).
\end{aligned}$$

右乗法性

2.6.1 項の定理 2.6.1 において，つぎのような Cullis 行列式の右乗法性を一般化した結果を示した．

> $1 \leq k \leq \ell \leq n$ のとき，行列 $X \in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$ と $Y \in M_{\ell,k}(\mathbb{C})$ に対して，

$$\det{}_{n,k}(XY) = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^L} \det{}_{n,k}(XE_c^L)\det{}_k((E_c^L)^*Y).$$

その別証明を考えてみる．

証明　グラスマン代数 $\bigwedge\mathbb{C}^\ell$ における余 Cullis 基底を用いると，$\Gamma(Y)\boldsymbol{e}_K^K = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^L}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^L|\Gamma(Y)\boldsymbol{e}_K^K)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^L$ と展開できる．つぎに，$\Gamma(E_c^L)\boldsymbol{e}_K^K = \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^L$ かつ

$$\Gamma(XE_c^L)\boldsymbol{e}_K^K = \pi_k(XE_c^L), \quad \Gamma((E_c^L)^*Y)\boldsymbol{e}_K^K = \pi_k((E_c^L)^*Y)$$

となることに注意すると，

$$\begin{aligned}
\det{}_{n,k}(XY) &= (\mathbf{1}^{(k)}|\pi_k(XY)) = (\mathbf{1}^{(k)}|\Gamma(XY)\boldsymbol{e}_K^K) \\
&= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^L}(\mathbf{1}^{(k)}|\Gamma(X)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^L)(\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^L|\Gamma(Y)\boldsymbol{e}_K^K) \\
&= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^L}(\mathbf{1}^{(k)}|\Gamma(XE_c^L)\boldsymbol{e}_K^K)(\Gamma(E_c^L)\boldsymbol{e}_K^K|\Gamma(Y)\boldsymbol{e}_K^K) \\
&= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^L}\det{}_{n,k}(XE_c^L)(\boldsymbol{e}_K^K|\Gamma((E_c^L)^*Y)\boldsymbol{e}_K^K) \\
&= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^L}\det{}_{n,k}(XE_c^L)\det{}_k((E_c^L)^*Y).
\end{aligned}$$

■

同様な命題が余 Cullis 行列式に対しても成り立つ．

命題 3.3.9　$1 \le k \le \ell \le n$ のとき，行列 $X \in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$ と $Y \in M_{\ell,k}(\mathbb{C})$ に対して，

$$\mathrm{Det}_{n,k}(XY) = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^L}\mathrm{Det}_{n,k}(XE_c^L)\det{}_k((E_c^L)^*Y).$$

とくに，$\ell = k$ のときには，

$$\mathrm{Det}_{n,k}(XY) = \mathrm{Det}_{n,k}(X)\det{}_k(Y).$$

補題 3.3.10　$X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ の極分解を $V|X|$ とすると，

$$\pi_k(X) = \det{}_k(|X|)\pi_k(V).$$

証明　右乗法性を用いた直接の計算による.

$$
\begin{aligned}
\pi_k(X) &= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} (\boldsymbol{e}_c^I|\pi_k(X))\boldsymbol{e}_c^I = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \det{}_{n,k}(P_cX)\boldsymbol{e}_c^I \\
&= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \det{}_{n,k}(P_cV)\det{}_k(|X|)\boldsymbol{e}_c^I \\
&= \det{}_k(|X|)\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \det{}_{n,k}(P_cV)\boldsymbol{e}_c^I = \det{}_k(|X|)\pi_k(V).
\end{aligned}
$$

ただし，最後の等号は 1 行目の 2 つの等号が成り立つことからわかる.　■

3.4　Cullis 行列式の幾何学的性質

1.2 節や 3.1 節における議論でわかったように，n 次実正方行列の行列式の値は，その行列の n 個の列ベクトルを辺にもつ平行多面体の体積に，そのベクトルの並び方により決まる符号（を与える数 1 または -1）を掛けて得られる．したがって，その値は「符号付きの体積」と解釈することができる．正方行列でも正則でない場合には，多面体がつぶれて低い次元の部分ベクトル空間の中に含まれてしまうので，n 次元ベクトル空間の中での体積としては 0 になってしまう．ここでは，このような幾何学的解釈が，Cullis 行列式に対しても，符号の代わりに「符号付き重み」を用いて与えられることを示す．とくに，行列が非退化な場合には，この重みの大きさは，行列の像により決まる部分ベクトル空間に依存して決まり，その値は指向性球面と呼ばれる球面上の点として視覚化できる．また，非退化な $n\times k$ 行列全体の集合はスティーフェル多様体と同一視することができるので，付録 B において，この多様体を n 次元ベクトル空間の k 次元部分ベクトル空間のなすグラスマン多様体を底空間とし，k 次ユニタリ群を構造群にもつ主ファイバー束と見なすことにより，この行列式の重みが，グラスマン多様体の局所的微分可能な関数の値の絶対値により与えられることを示す.

この節の多くの議論は複素行列に対してなされていて，上に述べた幾何学的議論は，複素行列の場合の結果を実行列の場合へ制限したものになっている場合が多い.

3.4.1 非退化な矩形行列のファイバー

n 次正方行列の行列式の値は，行列が退化している場合，つまり階数が n より小さいときには 0 になる．矩形行列に対する Cullis 行列式の場合にも同じように，行列が退化している場合には行列式の値が 0 になる．そこで，ここではもっぱら非退化な矩形行列を扱うことにする．以後，非退化な $n \times k$ 複素行列全体の集合と $n \times k$ 複素等長行列全体の集合をそれぞれ，

$$V'_{n,k}(\mathbb{C}), \quad V_{n,k}(\mathbb{C})$$

で表す．もちろん，後の集合は前の集合の部分集合である．実行列の場合には，$V'_{n,k}(\mathbb{R}), V_{n,k}(\mathbb{R})$ などと表す．

また，定理 3.2.11 の直前に述べたように，n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 上の k 次元射影全体の集合を

$$\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$$

で表す．実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の場合には，$\mathrm{Proj}^k(\mathbb{R}^n)$ で表す．

各 $P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ に対して，部分ベクトル空間 $P\mathbb{C}^n$ を像にもつ $n \times k$ 行列の全体 $\{X \in M_{n,k}(\mathbb{C}) \mid X\mathbb{C}^k = P\mathbb{C}^n\}$，または $n \times k$ 等長行列の全体 $\{V \in V_{n,k}(\mathbb{C}) \mid VV^* = P\}$ を，それぞれ

$$V'_{n,k}(P), \quad V_{n,k}(P) \tag{3.25}$$

で表すことにすれば，非退化な $n \times k$ 行列全体，または $n \times k$ 等長行列の全体は，それぞれ

$$V'_{n,k}(\mathbb{C}) = \bigcup_{P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)} V'_{n,k}(P), \quad V_{n,k}(\mathbb{C}) = \bigcup_{P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)} V_{n,k}(P)$$

と表せる．右辺の各集合は互いに共通部分をもたないので，(3.25) 式の各集合を P におけるファイバーと呼ぶことにする．この用語を使う理由に関しては付録 B において説明する．実行列の場合にも同様な記号と用語を用いる．

ここで，これから使う予定の新たな用語と記号を導入しておこう．

正則な n 次複素正方行列全体のなす集合を $GL(n, \mathbb{C})$ で表す．2 つの正則行列 A, B の積 AB は再び正則行列であるし，どの正則行列 A にも逆行列

A^{-1} が存在するので，$GL(n,\mathbb{C})$ は群をなし，複素行列の**一般線形群**と呼ばれている．また，正則行列の中でも，行列式の値が 1 のもの全体

$$SL(n,\mathbb{C}) = \{T \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \det{}_n(T) = 1\}$$

は**特殊線形群**と呼ばれ，例えば「$n=2$ の場合は，ミンコフスキー空間におけるローレンツ変換を導く」ことが知られている．

また n 次ユニタリ行列全体のなす集合を $U(n)$ で表す．この集合も群になることがわかり，**ユニタリ群**と呼ばれている．また，ユニタリ行列の中でも，行列式の値が 1 のもの全体

$$SU(n) = \{T \in U(n) \mid \det{}_n(T) = 1\}$$

は**特殊ユニタリ群**と呼ばれる.「$n=2$ の場合は，実 3 次元ベクトル空間における回転を導く」ことが知られている．

これらの記号を用いると，ファイバーは，$V_{n,k}(P)$ の元 V を任意に 1 つ固定すると，

$$V'_{n,k}(P) = \{VB \mid B \in GL(k,\mathbb{C})\}, \quad V_{n,k}(P) = \{VU \mid U \in U(k)\}$$

と表せる．したがって，系 2.6.2 の右乗法性により，同一のファイバーに属する等長行列に対する Cullis 行列式の値の絶対値はどれも等しい．実行列の場合にも同様なことがいえる．その際，$V_{n,k}(P)$ の元は，k 次元部分ベクトル空間 $P\mathbb{R}^n$ の座標系を定める規格直交基底，つまり規格直交 k 枠（直交軸）と解釈され，その行列式の値の絶対値はどれも同じであるから，符号は規格直交 k 枠の向きと解釈することができる．

3.4.2　Cullis 行列式の双対性

以下では，各ファイバー内では，冒頭に述べた正方行列の行列式が満たす性質と類似な性質が，矩形行列の行列式に対しても成り立つことを説明しよう．ファイバー $V'_{n,k}(P)$ の元 X の極分解 $V|X|$ を用いると，$V \in V_{n,k}(P)$ であり，写像

$$X \in V'_{n,k}(P) \longmapsto \pi_k(V) \in \bigwedge{}^k\, \mathbb{C}^n$$

が定まる[12]．この分解可能 k ベクトル $\pi_k(V)$ の幾何学的な描像が得やすいように，しばらくは実行列の場合に限って話を進めることにする．

とくに，$k=n-1$ のときには，

$$(J\pi_{n-1}(V)|\boldsymbol{x}) = \det{}_n((V,\boldsymbol{x})) = 0 \quad (\boldsymbol{x} \in P\mathbb{R}^n)$$

となるので，分解可能 $n-1$ ベクトル $\pi_{n-1}(V)$ の Cullis 基底 $\{\boldsymbol{e}_c^I \mid c \in \mathscr{C}_{n-1}^I\}$ に関するフーリエ係数 $\{a_c \mid c \in \mathscr{C}_{n-1}^I\}$ は，

$$a_{I\setminus\{i\}} = (\boldsymbol{e}_{I\setminus\{i\}}^I|\pi_{n-1}(V)) = (J\pi_{n-1}(V)|J\boldsymbol{e}_{I\setminus\{i\}}^I) = (J\pi_{n-1}(V)|\boldsymbol{e}_i)$$

を満たすので，ベクトル $J\pi_{n-1}(V) \in \mathbb{R}^n$（以後，$P\mathbb{R}^n$ に対する**正規ベクトル**と呼ぶ）は $n-1$ 次元部分ベクトル空間 $P\mathbb{R}^n$ の「方向余弦」を与えることがわかる．これは上に述べたファイバーに属する行列 $X=V|X|$ の「向き」を与えているものと考えられる．

そこで，k が $n-1$ でないときにも，ベクトル $J\pi_k(V)$ は $n-k$ 重外積冪 $\bigwedge^{n-k}\mathbb{R}^n$ において，$k=n-1$ の場合と同じ役割を果たすものと解釈し，$J\pi_k(V)$ を**広義正規ベクトル**と呼ぶことにする．

つぎに，そのベクトルにより決まる，原点からつぎの定理 3.4.1 に現れる球面までの距離が，ファイバーに付けられる「重み」を与えることを示す．その結果，

> 非退化な $n\times k$ 行列 X の行列式 $\det{}_{n,k}(X)$ の値は，列ベクトルを辺にもつ平行多面体の体積に相当する $\det{}_k(|X|)$ に，この「符号付き重み」$\det{}_{n,k}(V)$ を掛けて得られる

ことがわかる．

まず，つぎの定理において，Cullis 行列式と余 Cullis 行列式の間には双対関係が成り立つことと，矩形行列の行列式にはその特性を表すある球面上の点が対応していることを示そう．

定理 3.4.1（**行列式の双対性**）　$P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C})$ とする．等長行列 $V \in V_{n,k}(P)$ に対して，等長行列 $V' \in V_{n,n-k}(1_n - P)$ で $(V,V') \in SU(n)$ を満たすものが存在する．このとき，つぎのことが成り立つ．

[12] $V=(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k)$ に対して，$\pi_k(V)=\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_k$ である．(3.15) 式参照．

(i) $\pi_{n-k}(V') = J\pi_k(V)$.

(ii) $V'' \in V_{n,n-k}(1_n - P)$ が $(V, V'') \in SU(n)$ を満たせば，$V'' = V'W$ を満たす $W \in SU(n-k)$ が存在する．

(iii) $\det_{n,k}(V) = \overline{\mathrm{Det}_{n,n-k}(V')} = (\pi_{n-k}(V')|\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)})$ が成り立つ．

(iv) $s = \det_{n,k}(V)$ とする．各 $c \in \mathscr{C}_k^I$ に対し，$a_c = (\boldsymbol{e}_c^I|\pi_k(V))$ かつ $z_c = \overline{a_c}s$ とすれば，

$$|s|^2 = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} |z_c|^2, \quad \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} z_c \geq 0, \quad \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \left|z_c - \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.$$

証明 V' の存在と主張 (i) は定理 3.2.11 の (iii) による．

(ii) 等長変換 V' と V'' は同じファイバーに属するから，それらの像は一致する．このとき，$(V')^*V'' \in U(n-k)$ が成り立つので，これを W とすれば，$W \in U(n-k)$ かつ $V'' = V'W$ と表せる．ゆえに，$(V, V'') = (V, V')(1_k \oplus W)$. 両辺の行列式を計算すると，$\det_{n-k}(W) = \det_n(1_k \oplus W) = 1$ となるので，$W \in SU(n-k)$.

(iii) $J\mathbf{1}^{(k)} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}$ であるから，

$$\begin{aligned}\det_{n,k}(V) &= (\mathbf{1}^{(k)}|\pi_k(V)) = (J\pi_k(V)|J\mathbf{1}^{(k)}) \\ &= (\pi_{n-k}(V')|\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}) = \overline{\mathrm{Det}_{n,n-k}(V')}.\end{aligned}$$

(iv) 主張 (iii) の結果を用いると，

$$s = (\mathbf{1}^{(k)}|\pi_k(V)) = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} a_c.$$

ゆえに，$|s|^2 = s\overline{s} = s\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \overline{a_c} = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} z_c$．よって，

$$|s|^2 = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} z_c = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \overline{z_c}.$$

また，$\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} |a_c|^2 = \|\pi_k(V)\|^2 = 1$ であるから，

$$\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} |z_c|^2 = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} |s\overline{a_c}|^2 = |s|^2$$

となる．したがって，

$$\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\left|z_c-\frac{1}{2}\right|^2=\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}\left\{|z_c|^2-\frac{1}{2}(z_c+\overline{z_c})\right\}+\frac{1}{4}\binom{n}{k}=\frac{1}{4}\binom{n}{k}. \quad \blacksquare$$

この定理の (iii) で述べた，行列式 $\det_{n,k}(V)$ の値が広義正規ベクトル $J\pi_k(V)$ と余 Cullis ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}$ の内積の値として与えられるという主張は，命題 2.6.4 の拡張になっている．

つぎの問題により，定理の主張 (iii) を簡単な例で確かめてみよう．

問題 59　3×1 等長行列

$$V=\frac{1}{\sqrt{5}}\{\sqrt{2}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)+\boldsymbol{e}_3\}$$

に対して，3×2 等長行列 V' で $(V,V')\in SO(3)$ を満たすものを探し，

$$\mathrm{Det}_{3,2}(V')=\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

となることを示せ．

定理 3.4.1 の内容を実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に制限して考えると，主張 (iv) の式は等長行列の行列式の向きと重みを表す**球面の方程式**を与えている．つまり，等長写像として与えられる行列 V の行列式の値 s に関する情報は，$N=\binom{n}{k}$ 次元実ベクトル空間 $\bigwedge^k\mathbb{R}^n$ において，Cullis 基底により決まる座標に関して，中心が $(1/2,\ldots,1/2)$ で，原点を通る半径が $\sqrt{N}/2$ の球面上の点として実現される．このとき，原点からその球面上の点 $(a_cs)_{c\in\mathscr{C}_k^I}$ までの距離と規格ベクトル $\pi_k(V)$ の向きが，等長変換 V が $\mathbb{R}^k$ を $\mathbb{R}^n$ への埋め込むときの重みと向きを与えている．この球面は原点を通るので，たまたま点 $(a_cs)_{c\in\mathscr{C}_k^I}$ が原点の場合には重みが 0 となる．したがって，行列式の値も 0 となり，向きは問題にならない．以後，実ベクトル空間での議論をするときには，座標を $(z_c)_{c\in\mathscr{C}_k^I}$ の代わりに，$(x_c)_{c\in\mathscr{C}_k^I}$ と表すことにする．つまり，$(a_cs)_{c\in\mathscr{C}_k^I}=(x_c)_{c\in\mathscr{C}_k^I}$ である．

この定理の主張 (iii) によれば，埋蔵 $V:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ の向きは，$n\times(n-k)$ 行列 V' の余 Cullis 行列式の値が正，負または 0 かにより，向きを保存するか，逆向きにするか，またはその行列式の値を 0 にするかがわかる．その様子は，電波を受信するときのアンテナのように，電波の強さは変わらなくても，アンテナの向きによりアンテナに流れる電流の大きさが変化する様子と

よく似ている．つまり，この定理は Cullis 行列式にはこのような**指向性**があることを示している．

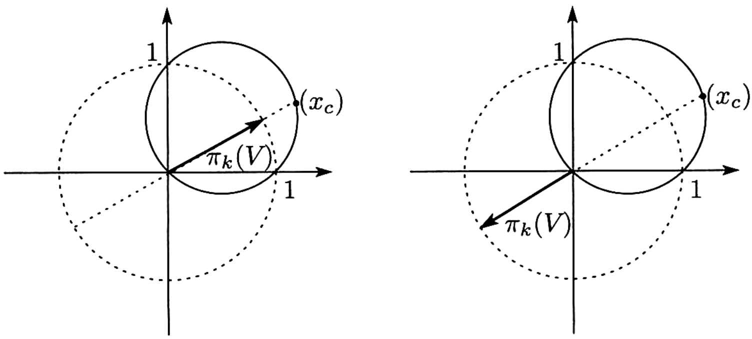


図 3.1 左：$\det_{n,k}(V) > 0$，右：$\det_{n,k}(V) < 0$.

上で述べた事柄を系としてまとめておく．

系 3.4.2 V を $\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}^n$ への等長写像とし，$N = \binom{n}{k}$ とする．

(i) 行列 V の行列式 $\det_{n,k}(V)$ の値の絶対値は，N 次元ベクトル空間 $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ における原点から，ベクトル $\pi_k(V)$ の決める直線が，定理で述べた行列式の値の球面と交わる点 $(x_c)_{c\in\mathscr{C}_k^I}$ までの距離として実現され，行列式の値の正，負の符号はそれぞれ，内積 $(J\pi_k(V)|\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}) = (\mathbf{1}^{(k)}|\pi_k(V))$ の値の正，負と一致している．

(ii) 行列式 $\det_{n,k}(V)$ の値は閉区間 $[-\sqrt{N}, \sqrt{N}]$ に含まれる．

(iii) $k = n-1$ のときには，行列式の値が $\pm\sqrt{n}$ となることと，すべての $c \in \mathscr{C}_1^I$ に対して，a_c が同一の値であることは同値である．また，このときの a_c の値は $\pm\sqrt{n^{-1}}$（複号同順）である．

(iv) 行列式の値が 0 となることと，$\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} a_c = 0$ は同値である．

証明 (i) 定理 3.4.1 の議論からわかる．

(ii) $\|\mathbf{1}^{(k)}\|^2 = \|\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \boldsymbol{e}_c^I\|^2 = N$ かつ $\|\pi_k(V)\| = 1$ であるから，

$$|\det_{n,k}(V)| = |(\mathbf{1}^{(k)}|\pi_k(V))| \leq \|\mathbf{1}^{(k)}\|\|\pi_k(V)\| = \sqrt{N}.$$

(iii) すべての $c \in \mathscr{C}_{n-1}^I$ に対して，a_c が同一の値 λ ならば，定理 3.4.1 により，$\sum_{c \in \mathscr{C}_{n-1}^I} |a_c|^2 = 1$ であるから，$n|\lambda|^2 = 1$ となり，$|\lambda| = \sqrt{n^{-1}}$. ゆえに，

$$s = \sum_{c \in \mathscr{C}_1^I} a_c = \pm n\sqrt{n^{-1}} = \pm\sqrt{n}.$$

逆に，$s = \pm\sqrt{n}$ ならば，複号同順で

$$\begin{aligned}\sum_{c \in \mathscr{C}_{n-1}^I} \left| a_c \mp \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^2 &= \sum_{c \in \mathscr{C}_{n-1}^I} \left(|a_c|^2 \mp \frac{2a_c}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) \\ &= 2\left(1 \mp \frac{s}{\sqrt{n}} \right) = 0\end{aligned}$$

となるので，すべての $c \in \mathscr{C}_{n-1}^I$ に対して，$a_c = \pm\sqrt{n^{-1}}$.

(iv) $s = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} a_c$ であるから，$s = 0$ であることと，$\sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} a_c = 0$ となることは必要十分である．■

1.4.2 項の問題 36 において，この系 3.4.2 の (iii) を満たす例が与えられている．

註 8　詳細は付録 A で説明するが，プリュッカー座標を用いると，集合（グラスマン多様体）$\mathrm{Proj}^k(\mathbb{R}^n)$ は，$n = 4,\ k = 2$ の場合に問題 57 で与えたような，プリュッカーの関係式を満たす曲面として表せる．このとき，点 P のプリュッカー座標 $(p_{i_1,\ldots,i_k})$ は，$V \in V_{n,k}(P)$ と各 $c \in \mathscr{C}_k^I$ の元を小さい順に並べた $j_1, \ldots, j_k$ により定まる値

$$p_{j_1,\ldots,j_k} = (\widetilde{e}_c^I | \pi_k(V))$$

に添え字に関する交代性や重複性を用いて決めることができる．

他方，図 3.1 の指向性を表す球面の議論において，グラスマン多様体 $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{R}^n)$ の点 P にはベクトル $\pi_k(V)$ により決まる球面上の点 $(x_c)_{c \in \mathscr{C}_k^I}$ が対応している．定理 3.4.1 の展開係数 $a_c = (\boldsymbol{e}_c^I | \pi_k(V))$ を用いると，その関係が

$$a_c = \mathrm{sgn}_I(c) p_{j_1,\ldots,j_k}$$

により与えられる．したがって，

$$x_c = a_c \det{}_{n,k}(V) = \mathrm{sgn}_I(c) p_{j_1,\ldots,j_k} \det{}_{n,k}(V)$$

となる．V を他の $V' \in V_{n,k}(P)$ に換えても，球面上の点 (x_c) の座標は絶対値が 1 の変化しかない．プリュッカー座標は同次座標であるから，点 P には球面上の 2 点 $\pm(x_c)$ が対応していることになる．

3.4.3　指向性球面

ここでは指向性の幾何学的な意味が直感的に捉えやすい表示を考える．実行列の場合に，$s = \det{}_{n,k}(V)$ に対して，

$$r = \begin{cases} s & (s \geq 0) \\ -s & (s < 0) \end{cases}$$

とおいて，r を極座標の動径の長さと考えて，$x_c = ra_c$ とする．$\det{}_n(V) \geq 0$ のときには，

$$\sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \left(x_c - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \binom{n}{k},$$

$\det{}_n(V) < 0$ のときには，

$$\sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \left(x_c + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \binom{n}{k}$$

とも表せるので，行列式 $\det{}_{n,k}(V)$ の符号は，点 $(x_c)_{c \in \mathscr{C}_k^I}$ がどちらの球面上にあるかにより決まってくる．そこで，前の球面を正指向性球面，後の球面を負指向性球面，両方合わせたものを，**指向性球面**ということにする．

とくに，$n = k$ の正方行列の場合には，V は直交行列で，

$$\pi_n(V) = (\boldsymbol{e}_I^I | \pi_n(V)) \boldsymbol{e}_I^I = \begin{cases} \boldsymbol{e}_I^I & (V \in SO(n)) \\ -\boldsymbol{e}_I^I & (V \notin SO(n)) \end{cases}$$

となるので，重みは消えてしまうが，符号は従来からのものと一致している．したがって，指向性球面は正方行列の場合の「行列式の符号」の自然な拡張と考えることができる．

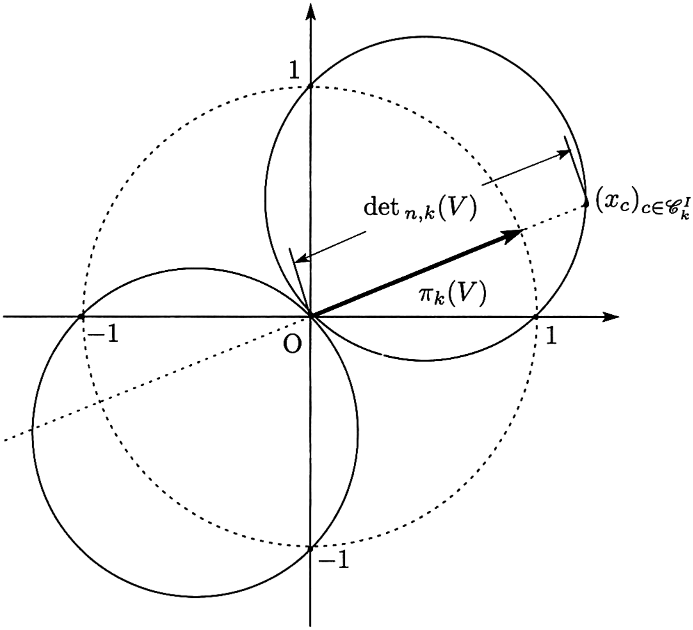


図 **3.2**　$\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ における指向性球面.

註 9　k が $n-1$ の場合には，指向性球面全体が等長行列の行列式の値により実現されるが，k が $n-k \geq 2$ を満たす場合には，必ずしも全体を実現しているわけではない．つぎに，そのことを簡単な例で確かめてみよう．

4×2 等長行列 V に対して，$\pi_2(V)$ のフーリエ係数 $a_c = (\boldsymbol{e}_c|\pi_2(V))$ がすべての $c \in \mathscr{C}_2^I$ で同一の値になることはない．実際，V を行ベクトルを用いて，$V = {}^t(\boldsymbol{v}^1,\ldots,\boldsymbol{v}^4)$ とする．もし，a_c の値がすべて同一であれば，2 次の小行列式の値は

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{v}^1\\ \boldsymbol{v}^2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\boldsymbol{v}^1\\ \boldsymbol{v}^3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{v}^1\\ \boldsymbol{v}^4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{v}^2\\ \boldsymbol{v}^3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\boldsymbol{v}^2\\ \boldsymbol{v}^4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{v}^3\\ \boldsymbol{v}^4\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

となる．最後の等号により，$\boldsymbol{v}^3 \neq \boldsymbol{v}^4$ である．2 番目と 4 番目の等号により，$\boldsymbol{v}^3 - \boldsymbol{v}^4 = \lambda\boldsymbol{v}^1$ と $\boldsymbol{v}^3 - \boldsymbol{v}^4 = \mu\boldsymbol{v}^2$ を満たす 0 でない複素数 λ と μ が存在する．これは最初の行列式の値が 0 でないことと矛盾する．

このことは，例 3.4.9 の (ii) の不等式 $|\det_{4,2}(V)| \leq 1+\sqrt{2}$ からもわかる．

つぎに，簡単な例で上の内容の説明をしよう．

例 3.4.3 2×1 行列 $V(\theta) = {}^t(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ の行列式の値は

$$s = \det{}_{2,1}(V(\theta)) = \cos\theta - \sin\theta\Big(= \sqrt{2}\cos\Big(\theta + \frac{\pi}{4}\Big)\Big)$$

となる．ここで，$r = |s|$ としたときの，極座標 (r,θ) が満たす方程式は

$$r = \begin{cases} \cos\theta - \sin\theta & (\theta \in [0,\pi/4] \cup [5\pi/4, 2\pi)) \\ -(\cos\theta - \sin\theta) & (\theta \in [\pi/4, 5\pi/4]) \end{cases}$$

となる．また，$\bigwedge^1 \mathbb{R}^2$ の Cullis 基底は $\{\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2\}$ であるから，その展開係数 $a_1 = (\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{v})$, $a_2 = (-\boldsymbol{e}_2|\boldsymbol{v})$ を用いて，$x = ra_1$, $y = ra_2$ とすれば，直交座標 (x,y) では

$$\Big(x \mp \frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(y \mp \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{2}$$

と表せる．このような解釈の下では，$0 \leq \theta < (\pi/4)$ または $(5\pi/4) < \theta < 2\pi$ のときには埋蔵 $V(\theta) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は向きを保存し，$(\pi/4) < \theta < (5\pi/4)$ のときには向きを逆転させ，$\theta = \pi/4$ または $\theta = 5\pi/4$ のときには行列式の値が 0 になり向きは消える．

例 3.4.4 $n \times k$ 等長行列 V の行列式 $\det{}_{n,k}(V)$ の値は広義正規ベクトル $J\pi_k(V)$ と余 Cullis ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}$ の内積として与えられる．そこで，その絶対値 $|(J\pi_k(V)|\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)})|$ を r，$(\boldsymbol{e}_c^I|\pi_k(V))$ を a_c とし，$x_c = ra_c$ $(c \in \mathscr{C}_k^I)$ とおけば，点 $(x_c)_{c\in\mathscr{C}_k^I}$ は指向性球面の方程式

$$\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \Big(x_c \mp \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}\binom{n}{k}$$

を満たす．ただし，$(J\pi_k(V)|\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)})$ の符号の正，負に応じて，式の中の符号を $-$ または $+$ に選ぶ．

3.4.4　指向性の最大・最小

これまでの議論により，等長変換の行列式の値は指向性をもつことがわかった．つまり，変換としては形を変えない埋蔵変換であるにもかかわらず，埋蔵の向きによりその行列式の値は，符号だけでなく絶対値まで変化する．そこで，その特別な場合として，すでに系 2.5.3 や例 3.4.3 でも説明した，行列式の値が 0 になる場合，あるいは行列式の値の絶対値が最大になる場合の特徴付けを考えてみよう．

まず，行列式の値が 0 になる場合から考える．系 2.5.3 から直ちに，つぎのことがわかる．

系 3.4.5　行列 $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ に対して，つぎの 2 条件は同値である．

(i) $\det_{n,k}(X) = 0$.

(ii) $(J\pi_k(X)|\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}) = 0$.

$n-k$ が奇数の場合には，

(iii) $\det_{n,k+1}((X, \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})) = 0$.

とも同値である．

この系 3.4.5 により，$n-k$ が奇数の場合には，条件 $\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)} \in X\mathbb{C}^k$ は，$\det_{n,k}(X) = 0$ となるための十分条件であるが，$n-k=1$ の場合には，必要十分条件でもある．$n-k$ が偶数の場合にはまだ詳しく検討されていないが，つぎにその場合を含む例を問題にしておく．

問題 60　行列 $X \in M_{n,2}(\mathbb{C})$ に対しては，$2m \in I \setminus \{n\}$ を満たすある m により決まる 2 つのベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{e}_{2m}, \quad \boldsymbol{e}_{2m+1} + \boldsymbol{e}_{2m+2} + \cdots + \boldsymbol{e}_n$$

が $X\mathbb{C}^2$ に属するならば，$\det_{n,2}(X) = 0$ となることを示せ．

$k=1$ または $n-k=1$ の場合

つぎに，行列を線形変換と見たときに，その変換の像が元々の直交座標系とどのような関係にあれば，行列式の値の絶対値が最大になるかを考える．その際，

$X \in V'_{n,k}(P)$ であるならば，任意の $U \in U(n)$ に対して，$UX \in V'_{n,k}(UPU^*)$ となることに注意しておこう．

命題 3.4.6 非退化な行列 $X = (x_{i,j}) \in M_{n,n-1}(\mathbb{C})$ に対して，つぎの 4 条件は同値である．

(i) ベクトル $\pi_{n-1}(X)$ は Cullis ベクトル $\mathbf{1}^{(n-1)}$ の定数倍である（行列式の値 $\det_{n,n-1}(P_c X)$ はすべての $c \in \mathscr{C}^I_{n-1}$ に対して同一である）．

(ii) 正規ベクトル $J\pi_{n-1}(X)$ は余 Cullis ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ の定数倍である．

(iii) 各 $j \in I \setminus \{n\}$ 列において，$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 0$ （ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ は X の値域と直交している）．

(iv) $|\det{}_{n,n-1}(X)| = \sup\{|\det{}_{n,n-1}(UX)| \mid U \in U(n)\}$.

上の条件のいずれかが成り立つときには，行列式 $\det_{n,n-1}(X)$ の絶対値は $\sqrt{n}\det{}_{n-1}(|X|)$ であり，$\det_{n,n-1}(P_c X)$ の絶対値は $\sqrt{n^{-1}}\det{}_{n-1}(|X|)$ である．

証明 (i) において，$\pi_{n-1}(X)$ がベクトル $\mathbf{1}^{(n-1)}$ の定数倍であることは，

$$\sum_{c \in \mathscr{C}^I_{n-1}} (\boldsymbol{e}^I_c \mid \pi_{n-1}(X))\boldsymbol{e}^I_c = \pi_{n-1}(X) = \lambda \sum_{c \in \mathscr{C}^I_{n-1}} \boldsymbol{e}^I_c$$

を満たす定数 λ が存在することと同値である．この式は，$\{\boldsymbol{e}^I_c \mid c \in \mathscr{C}^I_{n-1}\}$ が基底であることを使うと，すべての $c \in \mathscr{C}^I_{n-1}$ に対して，

$$\det{}_{n,n-1}(P_c X) = (\boldsymbol{e}^I_c \mid \pi_{n-1}(X)) = \lambda$$

が成り立つことと同値である．

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) 条件 (i) は $\pi_{n-1}(X) \in \mathbb{C}\mathbf{1}^{(n-1)}$ と表せる．ホッジ作用素を使えば，$J\mathbf{1}^{(n-1)} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ と表せるので，これは $J\pi_{n-1}(X) \in \mathbb{C}\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ となり，条件 (ii) と同値である．

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 定理 3.2.11 の証明により，正規ベクトル $J\pi_{n-1}(X)$ は $X\mathbb{C}^{n-1}$ の直交補空間の基底を用いて記述することができる．よって，正規ベクトルが $\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ の定数倍ならば，$\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ はどの $j \in I \setminus \{n\}$ に対しても，$X\boldsymbol{e}_j$ とも直交している．したがって，任意の $j \in I \setminus \{n\}$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{e}_i | X\boldsymbol{e}_j) = (\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)} | X\boldsymbol{e}_j) = 0.$$

(iii) ⇒ (ii) 条件 (iii) が成り立てば，任意の $j \in I \setminus \{n\}$ に対して，$X\boldsymbol{e}_j$ は $\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ と直交する．他方，X は非退化であるから，その像の直交補空間の次元は 1 である．したがって，$(X\mathbb{C}^{n-1})^{\perp}$ のベクトルは $\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ の定数倍である．

(i) ⇔ (iv) 行列 X の極分解を $V|X|$ とすれば，

$$|\det{}_{n,n-1}(X)| = |\det{}_{n,n-1}(V)| \det{}_{n-1}(|X|) \tag{3.26}$$

となるから，$U \in U(n)$ をいろいろと動かしたときの，$|\det{}_{n,n-1}(UX)|$ の上限は，$|\det{}_{n,n-1}(UV)|$ の上限の問題に帰着される．他方，任意の $V' \in V_{n,n-1}(\mathbb{C})$ に対して，$\det{}_{n,n-1}(V') = (\mathbf{1}^{(n-1)}|\pi_{n-1}(V'))$ および $\|\pi_{n-1}(V')\| = 1$ が成り立つので，不等式

$$|(\mathbf{1}^{(n-1)}|\pi_{n-1}(V'))| \leq \|\mathbf{1}^{(n-1)}\| \|\pi_{n-1}(V')\| = \|\mathbf{1}^{(n-1)}\|$$

が成り立つ．シュワルツの不等式において等号が成り立つことと，ベクトル $\pi_{n-1}(V')$ が $\mathbf{1}^{(n-1)}$ の定数倍になることは必要十分であるから，$|\det_{n,n-1}(V')|$ が上限の値をとることと，ベクトル $\pi_{n-1}(V')$ が $\mathbf{1}^{(n-1)}$ の定数倍になることは同値である． ■

命題と証明の間に補足した部分は，(3.26) 式と $\|\mathbf{1}^{(n-1)}\| = \|J\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}\| = \sqrt{n}$ を組み合わせることによりわかる．

定理 3.4.1 で説明した双対性を用いると，命題 3.4.6 の双対な命題が得られる．

命題 3.4.7　非退化な行列 $X = \boldsymbol{x} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ に対して，つぎの 3 条件は同値である．

(i) ベクトル $\pi_1(X)$ は Cullis ベクトル $\mathbf{1}^{(1)}$ の定数倍である．

(ii) 正規ベクトル $J\pi_1(X)$ は余 Cullis ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-1)}$ の定数倍である．

(iii) $|\det{}_{n,1}(X)| = \sup\{|\det{}_{n,1}(UX)| \mid U \in U(n)\}$.

このときの行列式 $\det{}_{n,1}(X)$ の絶対値は $\sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|$ である．

$k=2$ または $n-k=2$ の場合

等長変換の行列式の値の絶対値が最大になる問題を，上の命題 3.4.6, 3.4.7 と同じように，一般の矩形行列の場合にも考えたいが，註 9 で示したように，4×2 行列 V に対するベクトル $\pi_2(V)$ は決して $\mathbf{1}^{(2)}$ の定数倍にはならず，上の命題のようなことは成り立たない．残念なことに，現時点では，k および $n-k$ が 3 より大きい場合には，全く手掛かりが掴めていないが，$k=2$ または $n-k=2$ の場合には少し様子がわかるので，以下この項の残りでその議論をする．

まず $k=n-2$ の場合から考えてみることにする．その準備として，例 2.2.2 で説明した反ユニタリ $J_0:\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{e}_i\mapsto\sum_{i=1}^n\overline{a_i}\boldsymbol{e}_i$ と，余 Cullis 行列式を定義するときの交代多重線形汎関数 $\widehat{D}_{n,2}$ を用いて，

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\widehat{D}_{n,2}(J_0\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

とすれば，f は半双線形汎関数である．したがって，命題 2.2.12 により，

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}|K_n\boldsymbol{y})$$

を満たす n 次正方行列 K_n が存在する．$\widehat{D}_{n,2}$ の交代性と規格条件により，$i<j$ ならば，$(\boldsymbol{e}_i|K_n\boldsymbol{e}_j)=-(\boldsymbol{e}_j|K_n\boldsymbol{e}_i)=1$．また $(\boldsymbol{e}_i|K_n\boldsymbol{e}_i)=0$ となるので，上半三角行列 $\sum_{i<j}E_{i,j}$ を A とすれば，$K_n=A-A^*$ と表せる．したがって，$K_n=(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n)$ の列ベクトルは

$$\boldsymbol{k}_i=\sum_{m=1}^{i-1}\boldsymbol{e}_m-\sum_{m=i+1}^{n}\boldsymbol{e}_m$$

となる．ただし，$i=1$ のときの右辺の第 1 項と，$i=n$ のときの第 2 項は零ベクトルとしておく．したがって，$K_n^*K_n$ の (i,j) 成分は

$$(\boldsymbol{k}_i|\boldsymbol{k}_j)=\begin{cases}n-1 & (i=j)\\ n-2|i-j| & (i\neq j)\end{cases}.$$

ゆえに，

$$K_n^*K_n=(n-1)1_n+\sum_{k=1}^{n-1}(n-2k)\sum_{i=1}^{n-k}(E_{i,i+k}+E_{i+k,i}) \tag{3.27}$$

と展開される.

つぎに，$k=2$ の場合に移ろう．$n-k=2$ の場合と同じように，Cullis 行列式を定義するときの交代多重線形汎関数 $D_{n,2}$ を用いて，

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=D_{n,2}(J_0\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

とする．この g は半双線形汎関数であるから，命題 2.2.12 により，

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}|H_n\boldsymbol{y})$$

を満たす n 次正方行列 H_n が存在する．$D_{n,2}$ の交代性と規格条件により，$i<j$ ならば，$(\boldsymbol{e}_i|H_n\boldsymbol{e}_j)=-(\boldsymbol{e}_j|H_n\boldsymbol{e}_i)=(-1)^{i+j-1}$．また $(\boldsymbol{e}_i|H_n\boldsymbol{e}_i)=0$ となるので，上半三角行列 $\sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}E_{i,j}$ を B とすれば，$H_n=B-B^*$ と表せる．したがって，$H_n=(\boldsymbol{h}_1,\ldots,\boldsymbol{h}_n)$ の列ベクトルは

$$\boldsymbol{h}_j=(-1)^j\Big(\sum_{m=1}^{j-1}(-1)^{m-1}\boldsymbol{e}_m-\sum_{m=j+1}^{n}(-1)^{m-1}\boldsymbol{e}_m\Big)$$

となる．ただし，$j=1$ のときの右辺の第 1 項と，$j=n$ のときの第 2 項は零ベクトルとしておく．したがって，$H_n^*H_n$ の (i,j) 成分は

$$(\boldsymbol{h}_i|\boldsymbol{h}_j)=\begin{cases} n-1 & (i=j) \\ (-1)^{i+j}(n-2|i-j|) & (i\neq j)\end{cases}.$$

ゆえに，

$$H_n^*H_n=(n-1)1_n+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(n-2k)\sum_{i=1}^{n-k}(E_{i,i+k}+E_{i+k,i}) \tag{3.28}$$

と展開される．このとき，

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^iE_{i,i}\Big)K_n^*K_n\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^iE_{i,i}\Big)=H_n^*H_n$$

であるから，$\|K_n\|=\|H_n\|$ が成り立っている．

命題 3.4.8　行列 $K_n^*K_n$, $H_n^*H_n$ を (3.27), (3.28) 式のものとすると，

(i) 非退化な行列 $X\in M_{n,n-2}(\mathbb{C})$ に対して，

$$\sup\{|\det{}_{n,n-2}(UX)|\mid U\in U(n)\}=\|K_n^*K_n\|^{1/2}\det{}_{n-2}(|X|).$$

(ii) 非退化な行列 $X \in M_{n,2}(\mathbb{C})$ に対して，

$$\sup\{|\det{}_{n,2}(UX)| \mid U \in U(n)\} = \|H_n^* H_n\|^{1/2} \det{}_2(|X|).$$

証明 (i) X の極分解を $V|X|$ とする．定理 3.4.1 の結果を使うと，

$$\begin{aligned}
&\sup\{|\det{}_{n,n-2}(UV)| \mid U \in U(n)\}\\
=&\sup\{|\mathrm{Det}_{n,2}(V')| \mid V' \in V_{n,2}(\mathbb{C})\}\\
=&\sup\{|\widehat{D}_{n,2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \mid \|\boldsymbol{x}\| \le 1, \|\boldsymbol{y}\| \le 1\}\\
=&\sup\{|(J_0\boldsymbol{x}|K_n\boldsymbol{y})| \mid \|\boldsymbol{x}\| \le 1, \|\boldsymbol{y}\| \le 1\}\\
=&\|K_n\| = \|K_n^* K_n\|^{1/2}.
\end{aligned}$$

(ii) X の極分解を $V|X|$ とする．

$$\begin{aligned}
&\sup\{|\det{}_{n,2}(UV)| \mid U \in U(n)\}\\
=&\sup\{|\det{}_{n,2}(V')| \mid V' \in V_{n,2}(\mathbb{C})\}\\
=&\sup\{|D_{n,2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \mid \|\boldsymbol{x}\| \le 1, \|\boldsymbol{y}\| \le 1\}\\
=&\sup\{|(J_0\boldsymbol{x}|H_n\boldsymbol{y})| \mid \|\boldsymbol{x}\| \le 1, \|\boldsymbol{y}\| \le 1\}\\
=&\|H_n\| = \|H_n^* H_n\|^{1/2}.
\end{aligned}$$

■

この命題 3.4.8 により，$n \times 2$ または $n \times (n-2)$ 行列の行列式の絶対値がとる値の範囲が，行列 K_n のノルムにより与えられることがわかった．そこで，$n = 3, 4, 5$ の場合のノルムを求めてみよう．

例 3.4.9 (i) $n = 3$ のときには，

$$K_3^* K_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

は正定値行列である．その固有方程式は $\lambda(\lambda-3)^2 = 0$ となるので，$\|K_3^* K_3\| = 3$ である．また，$(1/3)K_3^* K_3$ はベクトル $\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ の直交補空間への射影で，固有値 3 の固有空間への 2 次元射影を与えている．つまり，$\|K_3\| = \sqrt{3}$.

(ii) $n=4$（註9の補足）のときには,

$$K_4^*K_4=\begin{pmatrix}3&2&0&-2\\2&3&2&0\\0&2&3&2\\-2&0&2&3\end{pmatrix}$$

となり，その固有方程式は $(\lambda-3-2\sqrt{2})^2(\lambda-3+2\sqrt{2})^2=0$ で与えられる．したがって，$\|K_4\|^2=3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$．$K_4^*K_4$ のスペクトル分解を $(1+\sqrt{2})^2E_++(1-\sqrt{2})^2E_-$ とすると,

$$E_\pm=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\pm\alpha&0&\mp\alpha\\\pm\alpha&1&\pm\alpha&0\\0&\pm\alpha&1&\pm\alpha\\\mp\alpha&0&\pm\alpha&1\end{pmatrix},\quad \alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

と表せる．ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^4$ の部分ベクトル空間 $E_\pm\mathbb{C}^4$ への等長変換を $V_\pm$ とすれば,

$$V_\pm=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{1+\alpha}&\mp\sqrt{1-\alpha}\\\pm\sqrt{1+\alpha}&\sqrt{1-\alpha}\\\sqrt{1-\alpha}&\pm\sqrt{1+\alpha}\\\mp\sqrt{1-\alpha}&\sqrt{1+\alpha}\end{pmatrix}$$

で与えられる．このとき，$(V_-,V_+)\in SU(4)$ であり,

$c\in\mathscr{C}_2^I$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
$\det_{4,2}(P_cV_-)$	$\sqrt{2}/4$	$1/2$	$\sqrt{2}/4$	$\sqrt{2}/4$	$1/2$	$\sqrt{2}/4$

となるので，Cullis 行列式 $\det_{4,2}(V_-)$ と余 Cullis 行列式 $\mathrm{Det}_{4,2}(V_+)$ の値はともに $1+\sqrt{2}$ で与えられ，確かに $\binom{4}{2}=6$ の平方根より小さい.

(iii) $n=5$ のときには,

$$K_5^*K_5=\begin{pmatrix}4&3&1&-1&-3\\3&4&3&1&-1\\1&3&4&3&1\\-1&1&3&4&3\\-3&-1&1&3&4\end{pmatrix}$$

となり，その固有方程式は

$$(\lambda^2 - 10\lambda + 5)(\lambda^3 - 10\lambda^2 + 12\lambda - 1) = 0$$

となる．左辺の第 2 因数の解を小さい順に $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ とすれば，$0 < \beta_1 < 5 - 2\sqrt{5} < \beta_2 < \beta_3 < 5 + 2\sqrt{5}$ となる．したがって，$\|K_5^* K_5\| = 5 + 2\sqrt{5}$ となり，この値は $\binom{5}{2} = 10$ より小さい．

この項の最後に，Cullis 行列式の値の絶対値が 1 となる場合の例を挙げておく．

系 3.4.10 $P = E_c E_c^*$ $(c \in \mathscr{C}_k^I)$ ならば，任意の $V \in V_{n,k}(P)$ に対して，$|\det_{n,k}(V)| = 1$.

証明 補題 2.4.2 により，各 $c \in \mathscr{C}_k^I$ に対して，$\det_{n,k}(E_c) = \mathrm{sgn}_I(c)$ となるので，Cullis 行列式の右乗法性により，

$$\det_{n,k}(V) = \det_{n,k}(E_c E_c^* V) = \mathrm{sgn}_I(c) \det_k(E_c^* V).$$

ここで，$E_c^* V$ は k 次ユニタリ行列であるから，$|\det_{n,k}(V)| = 1$ となる．■

3.4.5 ファイバー内での行列式の不変性

正方行列の行列式のもつ性質の多くは，行列 $X \in M_n(\mathbb{C})$ に対する行列式の値が，任意の $T \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して，

$$\det_n(TXT^{-1}) = \det_n(X)$$

を満たし，座標系の選び方によらないという事実に基づく場合が多い．この事実は，行列式の積に関する乗法性を用いて示されるが，矩形行列の場合には左からの正方行列の積に関しては行列式の乗法性が成り立たないために，このようなことを一般的に期待することはできない．しかし，矩形行列の場合でも，話を各ファイバー $V'_{n,k}(P)$ 内に制限すれば，類似の結果が得られることを示そう．

各 $P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ に対して，

$$H_P = \{T \in GL(n, \mathbb{C}) \mid TP\mathbb{C}^n = P\mathbb{C}^n\} \tag{3.29}$$

とすれば，これは一般線形群 $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群である．

定理 3.4.11（不変性）　各 $P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ において，$X \in V'_{n,k}(P)$ かつ $T \in H_P$ ならば，任意の $V \in V_{n,k}(P)$ に対して，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(TX) &= \det{}_n(PTP + (1_n - P))\det{}_{n,k}(X)\\ &= \det{}_{n,k}(X)\det{}_k(V^*TV).\end{aligned}$$

証明　X の極分解を $V|X|$ とすれば，$V \in V_{n,k}(P)$．$T \in H_P$ ならば，$T = PTP + T(1-P)$ と表せる．したがって，

$$TX = TV|X| = (PTP)V|X| = V(V^*PTPV)|X|.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(TX) &= \det{}_{n,k}(V)\det{}_k(V^*(PTP)V)\det{}_k(|X|)\\ &= \det{}_{n,k}(X)\det{}_k(V^*TV).\end{aligned}$$

$V' \in V_{n,k}(P)$ ならば，$V^*V' \in U(k)$ となるから，

$$\det{}_k(V^*TV) = \det{}_k((V')^*V(V^*TV)V^*V') = \det{}_k((V')^*TV').$$

他方，部分ベクトル空間 $(1_n - P)\mathbb{C}^n$ の規格直交基底 $\{\boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ を用いて，ユニタリ変換 U を

$$U\boldsymbol{e}_i = \begin{cases} V\boldsymbol{e}_i^K & (i = 1, \ldots, k)\\ \boldsymbol{b}_i & (i = k+1, \ldots, n)\end{cases}$$

とすれば，

$$U^*PU = \begin{pmatrix} 1_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

これを用いると，

$$\det{}_k(V^*(PTP)V) = \det{}_n\left(\begin{pmatrix} V^*(PTP)V & 0\\ 0 & 1_{n-k}\end{pmatrix}\right)$$

$$= \det{}_n(U^*(PTP + (1_n - P))U)$$
$$= \det{}_n(PTP + (1_n - P))$$

となるから，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(TX) &= \det{}_{n,k}(X)\det{}_k(V^*(PTP)V)\\ &= \det{}_n(PTP + (1_n - P))\det{}_{n,k}(X).\end{aligned}$$ ■

この定理において，一般線形群をユニタリ群に置き換えても，同様なことが成り立つ．

ファイバー $V'_{n,k}(P)$ に属する任意の等長変換 V に対して，（埋蔵）写像

$$\rho : B \in GL(k, \mathbb{C}) \longmapsto VBV^* + (1_n - P) \in GL(n, \mathbb{C}) \tag{3.31}$$

は単射準同型であり，$\rho(B) \in H_P$ を満たしている．

系 3.4.12 写像 ρ を (3.31) の単射準同型とする．このとき，$X \in V'_{n,k}(P)$ かつ $B \in GL(k, \mathbb{C})$ ならば，

(i) $\det{}_{n,k}(\rho(B)XB^{-1}) = \det{}_{n,k}(X)$.

(ii) $\det{}_{n,k}(\rho(B)X) = \det{}_n(\rho(B))\det{}_{n,k}(X) = \det{}_{n,k}(X)\det{}_k(B)$.

が成り立つ．

証明 (i) (3.31) で与えられる単射準同型 ρ を用いて，$T = \rho(B)$ とすれば，$T \in H_P$ となるので，定理 3.4.11 により，(3.31) の $V \in V_{n,k}(P)$ に対して，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(\rho(B)XB^{-1}) &= \det{}_{n,k}(TXB^{-1}) = \det{}_{n,k}(XB^{-1})\det{}_k(V^*TV)\\ &= \det{}_{n,k}(XB^{-1})\det{}_k(B) = \det{}_{n,k}(X).\end{aligned}$$

(ii) P は射影であるから，(3.30) 式のユニタリ変換 U を用いると，

$$U^*\rho(B)U = U^*(VBV^* + (1_n - P))U = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1_{n-k} \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\det{}_n(\rho(B)) = \det{}_n(U^*\rho(B)U) = \det{}_k(B)\det{}_{n-k}(1_{n-k}) = \det{}_k(B).$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}\det{}_{n,k}(\rho(B)X) &= \det{}_{n,k}(\rho(B)XB^{-1})\det{}_k(B)\\ &= \det{}_{n,k}(X)\det{}_n(\rho(B)).\end{aligned}$$ ■

3.5　一般逆行列への応用

大量のデータが大きな行列 X として得られている場合に, X の成分を係数にもち, ベクトル $\boldsymbol{x}$ の各成分を未知数にもつ, 高階の連立 1 次方程式

$$X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \tag{3.32}$$

の解が必要になることがある[13]. 場合によっては, X の像への射影行列 P を用いた方程式 $X\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{a}$ の解でよいこともある. このような状況に対処する道具の 1 つとして, 一般逆行列が知られている. 一般逆行列には反射的, 最小ノルム型, 最小二乗型, ムーア–ペンローズ逆行列などがある. 一般逆行列の詳細に関しては [21] を参照. ここでは, 矩形行列の行列式を使うと, 例 3.5.11 のように, 反射的な最小ノルム型一般逆行列が簡単に求められることや, また矩形行列がある性質を満たせば, 例 3.5.15 のように, 規格左余因子行列がムーア–ペンローズ逆行列であることなどを示す.

3.5.1　一般逆行列の定義

係数が $n \times m$ 行列 X により与えられる連立 1 次方程式 (3.32) を考える. ここでは, $m \leq n$ を仮定してはいない. もし

$$n = m \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{a} \in X\mathbb{C}^m$$

で行列 X が正則であれば, 解は逆行列を用いて, $X^{-1}\boldsymbol{a}$ と一意的に表せる. 一般逆行列の理論を使うと, 行列 X がこれらのいずれの条件も満たさない場合にも, 方程式 (3.32) の解の存在に関する議論をすることができる. その際, 解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ の一意性は要求しないが, 個々の具体的な問題で利用する場合に

[13] 中村郁：たとえば歯の, CT スキャンのはなし, 数学セミナー, **48** No. 5 (2009), 50–56.

は，これで十分であることが多い．

定義 3.5.1（**C.R.** ラオ (1962)） $n \times m$ 行列 X に対して，条件

$$XYX = X$$

を満たす $m \times n$ 行列 Y を，X の**一般逆行列**といい，X^- で表す．

例えば，

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと，条件式は $a+b+c+d=1$ となり，行列 X に対して，その一般逆行列が一意的に決まるわけではないので，X^- という記号は，一般逆行列のどれかを指している．いま，一般逆行列の 1 つを Y とすれば，

$$X\boldsymbol{x} = XYX\boldsymbol{x} = XY\boldsymbol{a} = X(Y\boldsymbol{a})$$

となるので，$Y\boldsymbol{a}$ は方程式 (3.32) の解である．したがって，この方程式の解全体のなす集合は

$$Y\boldsymbol{a} + \mathrm{Ker}(X) = \{Y\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(X)\} \tag{3.33}$$

により与えられる．しかも，この集合は一般逆行列 Y の選び方にはよらない．

この定義の特徴付けの 1 つを与えておく．

命題 3.5.2 $n \times m$ 行列 X に対して，$m \times n$ 行列 Y が X の一般逆行列であるための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{a} \in X\mathbb{C}^m$ に対して，ベクトル $Y\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^m$ が方程式 (3.32) の解になることである．

証明 十分性．方程式 $X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ が解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ をもつことと，$\boldsymbol{a} \in X\mathbb{C}^m$ は必要十分である．任意の $\boldsymbol{a} \in X\mathbb{C}^m$ に対して，ベクトル $Y\boldsymbol{a}$ が方程式 (3.32) の解ならば，$XY\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ となる．ここで $\boldsymbol{a}$ を $X\mathbb{C}^m$ の任意の元に置き換えると，$XYX\boldsymbol{x}' = X\boldsymbol{x}'$ がすべての $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{C}^m$ に対して成り立つ．ゆえに，$XYX = X$.

必要性．$XYX = X$ ならば，任意の $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{C}^m$ に対して，$XYX\boldsymbol{x}' = X\boldsymbol{x}'$.

したがって，任意の $\boldsymbol{a} \in X\mathbb{C}^m$ に対して，$XY\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ となり，方程式 (3.32) は解 $Y\boldsymbol{a}$ をもつ． ■

定義 3.5.1 の条件式から，変換 XY, YX はともに冪等で，それぞれ，部分ベクトル空間 $X\mathbb{C}^m$, $YX\mathbb{C}^m$ 上への線形変換である．このとき，変換 Y は $X\mathbb{C}^m$ 上では単射である．さらに，X と Y の階数は不等式

$$\mathrm{rank}(X) = \mathrm{rank}(XYX) \leq \min\{\mathrm{rank}(X), \mathrm{rank}(Y)\} \leq \mathrm{rank}(Y)$$

を満たしている．X の一般逆行列 Y が条件

$$YXY = Y$$

も満たすときには，Y は**反射的**（または反射型）であるという．

問題 61　X の一般逆行列 Y が反射的であるための必要十分条件は $\mathrm{rank}(X) = \mathrm{rank}(Y)$ であることを示せ．

命題 3.5.3　$n \times m$ 行列 X の一般逆行列を Y とし，部分ベクトル空間 $X\mathbb{C}^m$ と $X^*\mathbb{C}^n$ への射影をそれぞれ P, Q とする．このとき，

(i) 冪等 XY が射影ならば，$XY = P$ かつ $X = PX$.

(ii) 冪等 YX が射影ならば，$YX = Q$ かつ $X = XQ$.

証明　(i) $XY\mathbb{C}^n \subset X\mathbb{C}^m$ である．逆に，$\boldsymbol{y} \in X\mathbb{C}^m$ ならば，$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ が存在する．したがって，$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{x} = XYX\boldsymbol{x} = XY\boldsymbol{y}$. ゆえに，$X\mathbb{C}^m \subset XY\mathbb{C}^n$. よって，$XY = P$ かつ $PX = XYX = X$.

(ii) 射影 YX は自己随伴であるから，$YX\mathbb{C}^m = X^*Y^*\mathbb{C}^m \subset X^*\mathbb{C}^n$. 逆に，$\boldsymbol{z} \in X^*\mathbb{C}^n$ ならば，$\boldsymbol{z} = X^*\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ が存在する．したがって，$\boldsymbol{z} = X^*\boldsymbol{y} = X^*Y^*X^*\boldsymbol{y} = X^*Y^*\boldsymbol{z} = YX\boldsymbol{z}$. ゆえに，$X^*\mathbb{C}^n \subset YX\mathbb{C}^m$. よって，$YX = Q$ かつ $XQ = XYX = X$. ■

最小ノルム型一般逆行列

命題 3.5.4　行列 X の一般逆行列の 1 つを Y とする．

(i) 冪等 YX が射影ならば，方程式 (3.32) の解の集合 (3.33) に含まれる元の中で，解 $Y\boldsymbol{a}$ のノルムが一番小さい．

(ii) 冪等 YX が射影であるための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{a} \in X\mathbb{C}^m$ に対して，方程式 (3.32) の解の集合 (3.33) 中で，$Y\boldsymbol{a}$ のノルムが一番小さいことである．

(iii) X が非退化な場合には，$YX = 1_m$ である．

証明　$\mathbb{C}^m$ の部分ベクトル空間 $X^*\mathbb{C}^n$ への射影を Q とする．

(i) 冪等 YX が射影ならば，命題 3.5.3 により，$YX = Q$ である．方程式 $X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ の解 $\boldsymbol{x}$ に対して，$Q\boldsymbol{x} = YX\boldsymbol{x} = Y\boldsymbol{a}$ となるので，この $Q\boldsymbol{x}$ もこの方程式の解であり，しかも

$$\|\boldsymbol{x}\| \geq \|Q\boldsymbol{x}\| = \|Y\boldsymbol{a}\|.$$

ゆえに，解の集合 $Y\boldsymbol{a} + \mathrm{Ker}X$ の元の中で，$Y\boldsymbol{a}$ のノルムが一番小さい．

(ii) (i) により，必要性はわかるので，十分性を示す．解の集合の中で $Y\boldsymbol{a}$ のノルムが一番小さければ，任意の $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(X)$ に対して，$\|Y\boldsymbol{a}\| \leq \|Y\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}\|$ が成り立つ．両辺を二乗して展開すると，

$$2\mathrm{Re}(\boldsymbol{y}|Y\boldsymbol{a}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0.$$

ベクトル $\boldsymbol{y}$ は $\mathrm{Ker}(X)$ の元であるから，任意の複素数 z に対して，$z\boldsymbol{y}$ も $\mathrm{Ker}(X)$ の元である．このとき，z の偏角を調整すると，$0 \leq 2z(\boldsymbol{y}|Y\boldsymbol{a}) \leq |z|^2\|\boldsymbol{y}\|^2$ とすることができる．複素数 $z \in \mathbb{C}$ の絶対値は十分小さく選ぶことができるので，$(\boldsymbol{y}|Y\boldsymbol{a}) = 0$．ここでは，$\boldsymbol{a}$ を $X\mathbb{C}^m$ の任意の元に選べるから，$\mathrm{Ker}(X) \perp YX\mathbb{C}^m$ となる．補題 2.2.4 により，$\mathrm{Ker}(X)^\perp = X^*\mathbb{C}^n$ であるから，$QYX = YX$．他方，$QX^*Y^* = X^*Y^*$ であるから，$YXQ = YX$．

また，各 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m$ に対して，$Q\boldsymbol{z} = X^*\boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$ が存在するから，任意の $\boldsymbol{z}' \in \mathbb{C}^m$ に対して，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{z}|YX\boldsymbol{z}') &= (\boldsymbol{z}|QYXQ\boldsymbol{z}') = (Q\boldsymbol{z}|YXQ\boldsymbol{z}') = (X^*\boldsymbol{w}|YXQ\boldsymbol{z}') \\ &= (\boldsymbol{w}|XQ\boldsymbol{z}') = (X^*\boldsymbol{w}|Q\boldsymbol{z}') = (Q\boldsymbol{z}|Q\boldsymbol{z}') = (\boldsymbol{z}|Q\boldsymbol{z}').\end{aligned}$$

よって，$YX = Q$ となり，YX は射影である．

(iii) X が非退化な場合には，$X^*\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(X)^\perp = \{\boldsymbol{0}\}^\perp = \mathbb{C}^m$ となるので，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ に対して，$\boldsymbol{x} = X^*\boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ が存在する．し

たがって，

$$X^*Y^*\boldsymbol{x} = X^*Y^*X^*\boldsymbol{y} = X^*\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}.$$

ゆえに，$X^*Y^* = 1_m$．この随伴を考えれば，$YX = 1_m$ となる． ■

そこで，YX が射影になっているときの一般逆行列 Y を**最小ノルム型**という．

最小二乗型一般逆行列

つぎに，$\boldsymbol{a} \notin X\mathbb{C}^m$ の場合に一般逆行列が示す性質を考えてみよう．

XY が射影 P ならば，命題 3.5.3 により，P は $\mathbb{C}^n$ の部分ベクトル空間 $X\mathbb{C}^m$ への射影である．$\boldsymbol{a} \notin X\mathbb{C}^m$ の場合には，$(1-P)\boldsymbol{a}$ の部分が零ベクトルではないから，この部分を削除して考えると，方程式

$$X\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{a}$$

の解は $\boldsymbol{x} = Y\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^m$ により与えられる．$P\boldsymbol{a}$ は，部分ベクトル空間 $X\mathbb{C}^m$ の中で，$\boldsymbol{a}$ から最短距離の点であるから，この解は，補題 2.2.5 により，任意の $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{C}^m$ に対して

$$\|X\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \leq \|X\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{a}\|$$

を満たしている．このように，$\boldsymbol{a}$ の代わりに，$X\mathbb{C}^m$ の中で $\boldsymbol{a}$ に一番近い $P\boldsymbol{a}$ に対する解が決まるので，この解 $Y\boldsymbol{a}$ を**最小二乗解**という．そこで，$\boldsymbol{a} \notin X\mathbb{C}^m$ を仮定しない場合も含めて，一般に，XY が射影になっているときの一般逆行列 Y を**最小二乗型**という．

3.5.2　ムーア–ペンローズ逆行列

一般逆行列の定義に先立って，ムーアとペンローズにより独立に導入されていた逆行列の概念は，一般逆行列の特別な場合になっているので，その説明をする．

$n \times m$ 行列 X の一般逆行列 Y が，最小二乗型，ノルム最小型，かつ反射的なとき，つまり

$$(XY)^* = XY, \quad (YX)^* = YX, \quad YXY = Y$$

を満たすとき，**ムーア–ペンローズ逆行列**といい，X^- の代わりに X^+ で表す．

この定義から直ちに，X, X^* の値域への射影をそれぞれ P, Q とすれば，

$$Y = YXY = YP = QY = QYP$$

となる．また，行列 X が半等長のときには，その随伴 X^* がムーア–ペンローズ逆行列である．

命題 3.5.5　ムーア–ペンローズ逆行列は一意的に決まる．

証明　行列 X のムーア–ペンローズ逆行列を Y, Y' とする．XY, XY' は射影である．$XYXY' = XY'$ が成り立つので，両辺の随伴を考えれば，これら 2 つの射影は可換である．また，$XY'XY = XY$ より，$XY = XY'$．同様に，$Y'X$, YX は射影であり，$Y'XYX = Y'X$ を満たすから，これら 2 つの射影は可換である．また，$YXYX' = YX$ も満たすので，$YX = Y'X$．このことを使うと，$Y = Y(XY) = Y(XY') = (YX)Y' = (Y'X)Y' = Y'$．

■

いま，X の極分解 $V|X|$ を使って，変換 $|X|$ を部分ベクトル空間 $|X|\mathbb{C}^k$ へ制限したものの逆変換と変換 V^* との合成変換を

$$Y = (|X|_{|(|X|\mathbb{C}^k)})^{-1} \circ V^*$$

とすれば，Y は一般逆行列であるだけでなく，上の 3 条件も満たすので，Y はムーア–ペンローズ逆行列である．これは単に X の写像としての手順を逆に辿って書き直しただけのものであるが，ムーア–ペンローズ逆行列の一意性により，Y は上の形のものに限られる．とくに，X が非退化な場合には

$$Y = (X^*X)^{-1}X^*$$

と表せる．

つぎの 3.5.3 項において示すように，縦長の矩形行列の規格左余因子行列は最小ノルム型で，しかも反射的ではあるが，必ずしも最小二乗型ではない．しかし，つぎのようなことがわかる．

命題 3.5.6　$n \times m$ 行列 X に対して，Y を X の最小ノルム型一般逆行列とする．P が $\mathbb{C}^n$ の部分ベクトル空間 $X\mathbb{C}^m$ への射影ならば，

$$XY = P + XY(1_n - P)$$

と表せ，YP は X のムーア–ペンローズ逆行列である．

証明　YP を Y' とする．任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ に対して，

$$XY'X\boldsymbol{x} = XYPX\boldsymbol{x} = XYX\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{x} = PX\boldsymbol{x}$$

となるので，$XY'X = X$ かつ $XY'P = P$ が成り立つ．ゆえに，$XY' = XY'P + XY'(1_n - P) = P + 0 = P$ も，$Y'X = YPX = YX$ も射影である．また，$Y'XY'X = Y'X$ であるから，$Y'XY' = Y'XY'P = Y'P = Y'$．ゆえに，$Y'$ はムーア–ペンローズ逆行列である．■

この命題の中で使われている式の随伴を考えることにより，つぎの系が得られる．

系 3.5.7　$n \times m$ 行列 X に対して，Y を X の最小二乗型一般逆行列とする．Q が $\mathbb{C}^m$ の部分ベクトル空間 $X^*\mathbb{C}^n$ への射影ならば，

$$YX = Q + (1_m - Q)YX$$

と表せ，QY は X のムーア–ペンローズ逆行列である．

問題 62

(i) X の像への射影は $X(X^*X)^-X^*$ と表せることを示せ．

(ii) X のムーア–ペンローズ逆行列 X^+ は $X^*(XX^*)^-X(X^*X)^-X^*$ となることを示せ．

(iii) $n \times m$ 行列 X の一般逆行列 Y が，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ と任意の $\boldsymbol{y} \in Y\boldsymbol{a} + \mathrm{Ker}(X)$ に対して，

$$\|XY\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\| \leq \|X\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|, \quad \|Y\boldsymbol{a}\| \leq \|\boldsymbol{y}\|$$

を満たせば，Y はムーア–ペンローズ逆行列であることを示せ．

3.5.3 Cullis 行列式の応用

Cullis 行列式に関する結果を使うと，フェアブラザーズが [4] において示唆した方向への 1 つの解答を与えることができる．

補題 3.5.8 $n \times k$ $(k < n)$ 行列 X に対して，つぎの 2 条件は同値である．

(i) X は非退化である．

(ii) $(X, E_{I\setminus c}) \in GL(n, \mathbb{C})$ を満たす $c \in \mathscr{C}_k^I$ が存在する．

証明 $X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ とする．定理 3.2.5 により，$\det_{n,k}(P_c X)$ は分解可能 k ベクトル $\pi_k(X) = \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k$ の Cullis 基底に関するフーリエ係数であるから，

$$
\begin{aligned}
X \text{ は非退化} &\iff \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\} \text{ は 1 次独立} \\
&\iff \pi_k(X) \neq \mathbf{0} \\
&\iff \det{}_{n,k}(P_c X) \neq 0 \text{ を満たす } c \in \mathscr{C}_k^I \text{ が存在する} \\
&\iff \det{}_n((X, E_{I\setminus c})) \neq 0 \text{ を満たす } c \in \mathscr{C}_k^I \text{ が存在する}
\end{aligned}
$$

したがって，系 1.3.13 により，これは $(X, E_{I\setminus c})$ が正則であるような $c \in \mathscr{C}_k^I$ が存在することと同値である． ■

命題 3.5.9 $k < n$ とする．

(i) $n \times k$ 行列 X が非退化ならば，補題 3.5.8 の $c \in \mathscr{C}_k^I$ を用いて得られる $k \times n$ 行列 $E_K^*(X, E_{I\setminus c})^{-1}$ は X の反射的な最小ノルム型一般逆行列である．

(ii) $k \times n$ 行列 X が全射ならば，X^* に対して，補題 3.5.8 の $c \in \mathscr{C}_k^I$ を用いて得られる $k \times n$ 行列 $E_K^*(X^*, E_{I\setminus c})^{-1}$ の随伴行列は，X の反射的な最小二乗型一般逆行列である．

証明 (i) $Z = (X, E_{I\setminus c})^{-1}$ とし，$Y = E_K^* Z$ とおけば，Y は $k \times n$ 行列である．このとき，$Z(X, E_{I\setminus c}) = 1_n$ であるから，

$$
YX = (E_K^* Z)X = E_K^* Z(X, E_{I\setminus c})E_K = E_K^* E_K = 1_k.
$$

したがって，$XYX = X1_k = X$ が成り立ち，Y は X の一般逆行列である．YX は自己随伴であるから，最小ノルム型である．また，$YXY = 1_kY = Y$ も成り立つので，反射的である．

(ii) X が全射ならば，$n \times k$ 行列 X^* は非退化であるから，$k \times n$ 行列 $E_K^*(X^*, E_{I\setminus c})^{-1}$ は X^* の反射的な最小ノルム型一般逆行列である．これを Z' とすると，$Z'X^* = 1_k$ を満たす．したがって，$(Z')^*$ は $X(Z')^* = 1_k$, $X(Z')^*X = X$, $(Z')^*X(Z')^* = (Z')^*$ を満たすので，X の反射的な最小二乗型一般逆行列である．■

この証明からわかるように，行列 $(X, E_{I\setminus c})$ において，$E_{I\setminus c}$ の列ベクトルを並べ替えた行列を用いても，この命題 3.5.9 と同様なことがいえる．

3×2 行列

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

の行列式の値は 0 であるが，X は等長であるから，随伴行列 X^* はムーア–ペンローズ逆行列である．

$n \times k$ 行列（$k \leq n$）の行列式の値が 0 でない場合には，系 2.5.2 で示したように，いつでも規格左余因子行列が求められるので，上の命題の条件を満たす $c \in \mathscr{C}_k^I$ が見つけられなくても，つぎのように上と同様な結果が得ることができる．

命題 3.5.10　$k \leq n$ とする．

(i) $n \times k$ 行列 X の Cullis 行列式 $\det{}_{n,k}(X)$ の値が 0 でなければ，X の規格左余因子行列，つまり (i,j) 要素に

$$\frac{(-1)^{i+j}}{\det{}_{n,k}(X)} \det{}_{n-1,k-1}(X_{j,i})$$

をもつ $k \times n$ 行列は反射的な最小ノルム型一般逆行列である．ただし，$X_{j,i}$ は X から第 j 行と第 i 列を除いて得られる $(n-1) \times (k-1)$ 行列である．

(ii) $k \times n$ 行列 X の随伴行列の Cullis 行列式 $\det{}_{n,k}(X^*)$ の値が 0 でなけ

れば，X^* の規格左余因子行列の随伴行列は，X の反射的な最小二乗型一般逆行列である．

証明 X の規格左余因子行列を Y とすれば，$YX = 1_k$ となるので，証明は命題 3.5.9 の (i) の場合と同じようにすればよい． ■

ここでは，上の 2 つの命題の結果それぞれを用いて，一般逆行列を求めてみよう．

例 3.5.11 3×2 行列

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

に対して，つぎの (i), (ii), (iii) では，命題 3.5.9 を用いて得られる一般逆行列を，(iv) では，命題 3.5.10 を用いて得られる一般逆行列を考え，それらの違いを見ておこう．

(i) $c = \{2, 3\}$ の場合には，$I \setminus c = \{1\}$ となる．このときの 3 次行列 $(X, E_{\{1\}})$ の逆行列 Z_1 は

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，この場合の X の反射的最小ノルム型一般逆行列は

$$Y = E^*_{\{1,2\}} Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(ii) $c = \{1, 3\}$ の場合の 3 次行列 $(X, E_{\{2\}})$ の逆行列 Z_2 は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，この場合の X の反射的最小ノルム型一般逆行列は

$$Y = E^*_{\{1,2\}} Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(iii) $c = \{1,2\}$ の場合の 3 次行列 $(X, E_{\{3\}})$ の逆行列 Z_3 は

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，この場合の X の反射的最小ノルム型一般逆行列は

$$Y = E^*_{\{1,2\}} Z_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) $\det_{3,2}(X) = 6$ であるから，X の規格左余因子行列は

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

となる．この行列は $(X^*X)^{-1}X^*$ と表せるので，X のムーア–ペンローズ逆行列でもある．

3.5.4　規格左余因子行列とムーア–ペンローズ逆行列

例 3.5.11 でもわかるように，与えられた行列に対して，反射的最小ノルム型一般逆行列が一意的に決まるわけではない．また，この例ではたまたま規格左余因子行列がムーア–ペンローズ逆行列になったが，このようなことも一般的に成り立つわけではない．

定理 3.5.12　$1 < k \leq n$ とする．$X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ を $n \times k$ 行列で，行列式は $\det_{n,k}(X) \neq 0$ を満たすものとする．このとき，つぎの 2 条件は同値である．

(i) X の規格左余因子行列はムーア–ペンローズ逆行列である．

(ii) 各 $i = 1, \ldots, k$ と任意のベクトル $\boldsymbol{a} \in (X\mathbb{C}^k)^\perp$ に対して，

$$\det_{n,k}((\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k)) = 0.$$

証明　(i) $\Rightarrow$ (ii) 行列 X の規格左余因子行列 Y は，命題3.5.10により，反射的最小ノルム型一般行列であるが，さらに X のムーア–ペンローズ逆行列であれば，命題3.5.6により，X の像の直交補空間のベクトル $\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{e}_j \in \mathbb{C}^n$ に対しては $Y\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$．いま，$X$ の規格左余因子行列を $Y = (y_{i,j})$ とすれば，その (i,j) 成分 $y_{i,j}$ は

$$\frac{\det_{n,k}((\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k))}{\det_{n,k}(X)}$$

により与えられる．したがって，ベクトル $Y\boldsymbol{a}$ の i 番目の成分は

$$\sum_{j=1}^{n} y_{i,j} a_j = \frac{\det_{n,k}((\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k))}{\det_{n,k}(X)}.$$

ゆえに，任意の $\boldsymbol{a} \in (X\mathbb{C}^k)^{\perp}$ に対して，

$$\det_{n,k}((\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k)) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) 上の証明に使われた議論を逆に辿れば，$YP = Y$ がわかるので，Y はムーア–ペンローズ逆行列である．■

例 3.5.11 における 3×2 行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ の規格左余因子行列はムーア–ペンローズ逆行列であったが，この場合には

$$(X\mathbb{C}^2)^{\perp} = \mathbb{C}\widetilde{\boldsymbol{1}}^{(1)}, \quad \det_{3,2}((\boldsymbol{x}_1, \widetilde{\boldsymbol{1}}^{(1)})) = \det_{3,2}((\widetilde{\boldsymbol{1}}^{(1)}, \boldsymbol{x}_2)) = 0$$

も成り立ち，定理 3.5.12 の条件 (ii) を満たしていることがわかる．

つぎに，等長行列 V の場合は，その随伴行列 V^* がムーア–ペンローズ逆行列である．そこで，V の規格左余因子行列 Y とムーア–ペンローズ逆行列 V^* との差違の大きさを計算してみよう．

系 3.5.13　$1 < k \leq n$ とする．$n \times k$ 等長行列 $V = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ の規格左余因子行列を Y とする．もし $Y^* = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k)$ ならば，各 $i = 1, \ldots, k$ に対して，

(i) $\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}_i \in (V\mathbb{C}^k)^{\perp}$.

(ii) $\|\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}_i\|^2 = \dfrac{\det_{n,k}((\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k))}{\det_{n,k}(V)}$.

が成り立つ.

証明　等長行列 $V = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) = (v_{i,j})$ の規格左余因子行列を $Y = (y_{i,j})$ とすれば，定理 3.5.12 により,

$$y_{i,j} = \frac{\det{}_{n,k}((\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{v}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}_k))}{\det{}_{n,k}(V)}$$

と表せる．また $Y^* = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$ であるから，$\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{n} \overline{y_{i,j}} \boldsymbol{e}_j$ と表せる．したがって,

$$(\boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_\ell) = \sum_{j=1}^{n} y_{i,j} v_{j,\ell} = \frac{\det{}_{n,k}((\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_\ell, \boldsymbol{v}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}_k))}{\det{}_{n,k}(V)} = \delta_{i,\ell}.$$

ゆえに，ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ は $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\} \setminus \{\boldsymbol{v}_i\}$ と直交し，$(\boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_i) = 1$ を満たしている．他方,

$$\|\boldsymbol{u}_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \overline{y_{i,j}} y_{i,j} = \frac{\det{}_{n,k}((\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}_k))}{\det{}_{n,k}(V)}$$

となる．このとき集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ は直交系であるから，任意の $\ell = 1, \dots, k$ に対して，$(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{v}_\ell) = 0$ となるので，$\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}_i \in (V\mathbb{C}^k)^\perp$ が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}_i\|^2 &= \|\boldsymbol{u}_i\|^2 - (\boldsymbol{u}_i | \boldsymbol{v}_i) \\ &= \frac{\det{}_{n,k}((\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{v}_k))}{\det{}_{n,k}(V)}. \end{aligned}$$ ■

つぎに，例 3.5.11 の (iv) の部分を一般化した定理を述べておく.

定理 3.5.14　X を非退化な $n \times (n-1)$ 行列とする．このとき，つぎの 2 条件は同値である.

(i) $\det{}_{n,n-1}(X) \neq 0$ かつ X の規格左余因子行列はムーア–ペンローズ逆行列である.

(ii) 余 Cullis ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ は X の像と直交している.

この条件 (ii) により，この定理は命題 3.4.6 の各条件とも同値である.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 行列 X の規格左余因子行列 Y は，命題 3.5.10 により，反射的最小ノルム型一般逆行列であるが，さらに X のムーア–ペンローズ逆行列であれば，前の定理 3.5.12 により，X の像の直交補空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，

$$\det{}_{n,n-1}((\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{i-1},\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{x}_{n-1}))=0$$

がすべての $i=1,\ldots,n-1$ に対して成り立つ．この左辺の $n-1$ 個の列ベクトルの張る部分ベクトル空間を $\mathscr{V}_i$ とすれば，系 2.5.3 の (i) または系 3.4.5 の (iii) により，

$$\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}\in\mathscr{V}_i \quad (i=1,\ldots,n-1)$$

が成り立つ．ここで，$\det_{n,n-1}(X)\neq 0$ という仮定により，X の列ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-1}\}$ は 1 次独立である．したがって，X の列ベクトルの集合に零でないベクトル $\boldsymbol{a}\in(X\mathbb{C}^n)^{\perp}$ を追加して得られる集合は，$\mathbb{C}^n$ の基底である．ここで，順番に $k=2,3,\ldots,n-1$ とすると，

$$\dim(\mathscr{V}_1\cap\mathscr{V}_2\cap\cdots\cap\mathscr{V}_k)=n-k$$

となる．実際，$\dim(\mathscr{V}_1\cap\mathscr{V}_2)=n-1$ ならば，$\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_1\cap\mathscr{V}_2=\mathscr{V}_2$ となり，矛盾する．ゆえに，$\dim(\mathscr{V}_1\cap\mathscr{V}_2)=n-2$．同様に，$\dim(\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3)=n-2$．つぎに，$\dim(\mathscr{V}_1\cap\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3)=n-2$ ならば，$\mathscr{V}_1\cap\mathscr{V}_2=\mathscr{V}_1\cap\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3=\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3$ となり，矛盾する．ゆえに，$\dim(\mathscr{V}_1\cap\mathscr{V}_2\cap\mathscr{V}_3)=n-3$．以下，同様な議論を繰り返せばよい．したがって，

$$\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}\in\bigcap_{i=1}^{n-1}\mathscr{V}_i=\mathbb{C}\boldsymbol{a}.$$

よって，$\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ は X の像と直交している．

(ii) $\Rightarrow$ (i) ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ が X の値域と直交しているとすれば，命題 3.4.6 により，$|\det_{n,n-1}(X)|=\sqrt{n}\det_{n-1}(|X|)\neq 0$．したがって，行列 $X=(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-1})$ の列ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-1}\}$ はベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ において 1 次独立である．したがって，$(X\mathbb{C}^{n-1})^{\perp}=\mathbb{C}\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ である．このとき，系 2.5.3 と行列式の列ベクトルに関する交代性により，

$$\det{}_{n,n-1}((\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{i-1},\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)},\boldsymbol{x}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{x}_{n-1}))$$

$$= \det{}_n((\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})) = 0$$

となる．ゆえに，定理 3.5.12 により，Y はムーア–ペンローズ逆行列である．

■

ここで，方程式 $X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ が解をもたない場合でも，X が定理 3.5.14 の条件 (ii) を満たしているときには，規格左余因子行列がムーア–ペンローズ逆行列になるので，最小二乗解が簡単に導ける例を挙げておこう．

例 3.5.15　3×2 行列と 3 次元ベクトルを

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると，$\boldsymbol{x}$ を未知ベクトルとする方程式 $X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ は解をもたない．しかし，$X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ の 2 つの列ベクトル $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ は 1 次独立であり，$\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)} \in (X\mathbb{C}^2)^\perp$ を満たしている．しかも，$\det{}_{3,2}(X) = -9$ となり，$\det{}_{3,2}(X) \neq 0$ である．したがって，定理 3.5.14 により，規格左余因子行列

$$Y = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

は X のムーア–ペンローズ逆行列になる．よって，$Y\boldsymbol{a} = {}^t(2/3, 1/3)$ は最小二乗解である．

最後に，規格左余因子行列がムーア–ペンローズ逆行列であるための条件を挙げておく．

命題 3.5.16　$1 < k \leq n$ とし，X を $n \times k$ 行列とし，$\det{}_{n,k}(X) \neq 0$ を満たすものとする．このとき，つぎの 3 条件は同値である．

(i) X の規格左余因子行列はムーア–ペンローズ逆行列である．

(ii) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ と任意の $\boldsymbol{a} \in (X\mathbb{C}^k)^\perp$ に対して，

$$(a(\boldsymbol{a})^* \mathbf{1}^{(k)} | a(\boldsymbol{x})^* \pi_k(X)) = 0.$$

(iii) 任意の $\boldsymbol{y} \in X\mathbb{C}^n$ と任意の $\boldsymbol{a} \in (X\mathbb{C}^k)^\perp$ に対して,

$$(a(\boldsymbol{y})\mathbf{1}^{(k)}|a(\boldsymbol{a})\pi_k(X)) = 0.$$

証明 (i) ⇒ (ii) 定理 3.5.12 により, $\det_{n,k}(X) \neq 0$ を満たす行列 X の規格左余因子行列がムーア–ペンローズ逆行列ならば, 各 $i = 1, \ldots, k$ と任意のベクトル $\boldsymbol{a} \in (X\mathbb{C}^k)^\perp$ に対して,

$$\begin{aligned}&(\mathbf{1}^{(k)}|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{i-1} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{x}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)\\ =&\det{}_{n,k}((\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k)) = 0\end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに,

$$\begin{aligned}&(a(\boldsymbol{a})^*\mathbf{1}^{(k)}|a(\boldsymbol{x})^*\pi_k(X)) = (\mathbf{1}^{(k)}|a(\boldsymbol{a})a(\boldsymbol{x})^*\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)\\ &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_i)(\mathbf{1}^{(k)}|a(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{x}_i} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)\\ &= \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_i)(\mathbf{1}^{(k)}|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{i-1} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{x}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) = 0.\end{aligned}$$

(ii) ⇒ (i) $\det_{n,k}(X) \neq 0$ であるから, 集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ は 1 次独立である. ここで, 集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\} \setminus \{\boldsymbol{x}_j\}$ の張る部分ベクトル空間への射影を Q とすると, $(1_n - Q)\boldsymbol{x}_j \neq \mathbf{0}$. そこで, (ii) の条件式のベクトル $\boldsymbol{x}$ にこの零でないベクトル $(1_n - Q)\boldsymbol{x}_j$ を代入すると, (i) での展開式を使って,

$$\begin{aligned}0 &= (a(\boldsymbol{a})^*\mathbf{1}^{(k)}|a((1_n - Q)\boldsymbol{x}_j)^*\pi_k(X))\\ &= \sum_{i=1}^{k}((1_n - Q)\boldsymbol{x}_j|\boldsymbol{x}_i)(\mathbf{1}^{(k)}|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{i-1} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{x}_{i+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)\\ &= \|(1_n - Q)\boldsymbol{x}_j\|^2(\mathbf{1}^{(k)}|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{j-1} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{x}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)\\ &= \|(1_n - Q)\boldsymbol{x}_j\|^2 \det{}_{n,k}((\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{j-1} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{x}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)).\end{aligned}$$

j は $1, \ldots, k$ の任意の元に選べるので, 定理 3.5.12 により, X の規格余因子行列はムーア–ペンローズ逆行列である.

(ii) ⇔ (iii) 部分ベクトル空間 $X\mathbb{C}^k$ への射影を P とする. 任意の $\boldsymbol{x} \in X\mathbb{C}^n$ に対して, $(1_n - P)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となるから, 任意の $\boldsymbol{a} \in (X\mathbb{C}^k)^\perp$ に対して,

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{a})a(\boldsymbol{x})^*\pi_k(X) &= a(\boldsymbol{a})\{a(P\boldsymbol{x})^* + a((1_n - P)\boldsymbol{x})^*\}\pi_k(X) \\ &= a(\boldsymbol{a})a(P\boldsymbol{x})^*\pi_k(X) = -a(P\boldsymbol{x})^*a(\boldsymbol{a})\pi_k(X). \end{aligned}$$

よって,

$$(a(\boldsymbol{a})^*\mathbf{1}^{(k)}|a(\boldsymbol{x})^*\pi_k(X)) = -(a(P\boldsymbol{x})\mathbf{1}^{(k)}|a(\boldsymbol{a})\pi_k(X)). \qquad \blacksquare$$

第4章　Cullis行列式の話題

この最終章では，正方行列の行列式には現れない，Cullis 行列式に固有の話題を 3 つだけ取り上げる．4.1 節の「矩形行列式の左乗法性」では，縦長の行列の左から正方行列を掛けて得られる行列の行列式の値が，もとの 2 つの行列の行列式の値の積になるためには，掛ける正方行列がどのような条件を満たせばよいのかを考える．行数 n と列数 k に対して，k または $n-k$ が 1 または 2 の場合には意味のある条件が求まるが，残りの場合の状況や限界については，ほとんどわかっていない．4.2 節の「Cullis 行列式の指向性の左平均」では縦長の実行列に，左から回転群の正方行列を作用させて得られる行列の行列式を，回転群上の不変積分を用いて平均すると，その値が 0 になることを示す．これは 3.4 節で述べた行列式の「符号付き重み」の重みには対称性があることを示している．4.3 節の「積み上げ行列の行列式」では同一の縦長の矩形行列を縦に積み重ねて得られる行列の行列式の値が，もとの行列の行列式の値とどういう関係にあるのかを示す．

4.1　矩形行列式の左乗法性

正方行列の場合には，2 つの行列の積の行列式の値は，それぞれの行列式の値の積になるという乗法性が成り立つが，正方でない行列の Cullis 行列式になると，系 2.6.2 で示したように，右側からの正方行列の積に関しては乗法的であるが，左側からの正方行列の積に関しては，(2.4.3 項で詳しく述べたように）行に関する交代多重線形性が成り立たないために，乗法性を期待することはできない．そこで，左側からの積に関しては，どのような条件があれば乗法的になるのかを検討してみよう．まず，準備から始める．

命題 4.1.1　正則行列 $T \in M_n(\mathbb{C})$ と $1 \leq \ell \leq n$ に対して，つぎの 3 条件は同値である．

(i) ℓ 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(\ell)}$ の各行において，成分の総和は 1 である．つまり，各 $d \in \mathscr{C}_\ell^I$ に対して，$\sum_{d' \in \mathscr{C}_\ell^I} \widetilde{T}^{(\ell)}_{d,d'} = 1$.

(ii) $\Gamma(T)\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)}$.

(iii) すべての $d \in \mathscr{C}_\ell^I$ に対して，$\mathrm{Det}_{n,\ell}(T^* E_d) = 1$.

証明　(i) ⇒ (ii) 各 $d \in \mathscr{C}_\ell^I$ に対して，

$$\begin{aligned}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I | \Gamma(T)\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)}) &= \left(\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I \;\middle|\; \Gamma(T) \sum_{d' \in \mathscr{C}_\ell^I} \widetilde{\boldsymbol{e}}_{d'}^I\right) \\ &= \sum_{d' \in \mathscr{C}_\ell^I} (\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I \mid \Gamma(T)\widetilde{\boldsymbol{e}}_{d'}^I) = \sum_{d' \in \mathscr{C}_\ell^I} \widetilde{T}^{(\ell)}_{d,d'} = 1.\end{aligned}$$

したがって，

$$\Gamma(T)\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} = \sum_{d \in \mathscr{C}_\ell^I} (\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I | \Gamma(T)\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)})\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I = \sum_{d \in \mathscr{C}_\ell^I} \widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I = \widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)}.$$

(ii) ⇒ (iii) まず，$\mathrm{Det}_{n,\ell}(T^* E_d) = (\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} | \Gamma(T^* E_d)\boldsymbol{e}_L^L)$ であることに注意する．ただし，$L = \{1, 2, \ldots, \ell\}$ である．ここで，各 $d \in \mathscr{C}_\ell^I$ に対して，

$$(\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} | \Gamma(T^* E_d)\boldsymbol{e}_L^L) = (\Gamma(T)\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} | \Gamma(E_d)\boldsymbol{e}_L^L) = (\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} | \widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I) = 1.$$

(iii) ⇒ (i) 各 $d \in \mathscr{C}_\ell^I$ に対して，

$$\begin{aligned}\sum_{d' \in \mathscr{C}_\ell^I} \widetilde{T}^{(\ell)}_{d,d'} &= \sum_{d' \in \mathscr{C}_\ell^I} (\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I | \Gamma(T)\widetilde{\boldsymbol{e}}_{d'}^I) = \sum_{d' \in \mathscr{C}_\ell^I} \overline{(\widetilde{\boldsymbol{e}}_{d'}^I | \Gamma(T^*)\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I)} \\ &= \overline{(\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} | \Gamma(T^*)\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I)} = \overline{(\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} | \Gamma(T^* E_d)\boldsymbol{e}_L^L)} \\ &= \overline{\mathrm{Det}_{n,\ell}(T^* E_d)} = \overline{1} = 1.\end{aligned}$$

■

正則行列 T_1 と T_2 がこの命題 4.1.1 の条件を満たせば，

$$\Gamma(T_1 T_2)\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} = \Gamma(T_1)(\Gamma(T_2)\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)}) = \Gamma(T_1)\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)}$$

となり，$T_1 T_2$ も正則行列で，この命題の条件を満たす．また，正則行列 T がこの命題の条件を満たせば，

$$\Gamma(T^{-1})\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} = \Gamma(T^{-1})(\Gamma(T)\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)}) = \Gamma(1_n)\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)}$$

となり，その逆行列 T^{-1} もこの条件を満たす．したがって，命題の条件を満たす正則行列全体の集合は $GL(n, \mathbb{C})$ の部分群になっている．そこで，この部分群に名前を付けておこう．

定義 4.1.2 上の命題 4.1.1 の条件のいずれかを満たす $T \in GL(n, \mathbb{C})$ 全体のなす部分群を $\widetilde{\mathbf{1}}^{(\ell)}$ **の固定群**といい，$S_n^{(\ell)}(\mathbb{C})$ で表す．

命題 4.1.3 正則行列 $T \in M_n(\mathbb{C})$ と $1 \leq \ell \leq n-1$ に対して，つぎの 4 条件は同値である．

(i) $T^* \in S_n^{(n-\ell)}(\mathbb{C})$.

(ii) $\Gamma(T)\mathbf{1}^{(\ell)} = \det{}_n(T)\mathbf{1}^{(\ell)}$.

(iii) 任意の $c \in \mathscr{C}_{n-\ell}^I$ に対して，$(\boldsymbol{e}_I^I|(\Gamma(T)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I) \wedge \mathbf{1}^{(\ell)}) = (-1)^{\ell(n-\ell)}$.

(iv) $n-\ell$ 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(n-\ell)}$ の各列において，成分の総和は 1 である．つまり，各 $c \in \mathscr{C}_{n-\ell}^I$ に対して，$\sum_{d' \in \mathscr{C}_{n-\ell}^I} \widetilde{T}_{d',c}^{(n-\ell)} = 1$.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Gamma(T^*)\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-\ell)} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(n-\ell)}$ とする．この式は

$$\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-\ell)} = \sum_{d \in \mathscr{C}_\ell^I} \Gamma(T^*)\widetilde{\boldsymbol{e}}_{I \setminus d}^I = \sum_{d \in \mathscr{C}_\ell^I} \sum_{c \in \mathscr{C}_\ell^I} (\widetilde{\boldsymbol{e}}_{I \setminus c}^I | \Gamma(T^*)\widetilde{\boldsymbol{e}}_{I \setminus d}^I)\widetilde{\boldsymbol{e}}_{I \setminus c}^I$$

と表せる．両辺に，ホッジ作用素 J を作用させると，

$$\begin{aligned}\mathbf{1}^{(\ell)} &= \sum_{d \in \mathscr{C}_\ell^I} \sum_{c \in \mathscr{C}_\ell^I} (\widetilde{\boldsymbol{e}}_{I \setminus d}^I | \Gamma(T)\widetilde{\boldsymbol{e}}_{I \setminus c}^I)\boldsymbol{e}_c^I \\ &= \sum_{d \in \mathscr{C}_\ell^I} \sum_{c \in \mathscr{C}_\ell^I} \mathrm{sgn}_I(c) \det{}_{n-\ell}(E_{I \setminus d}^* T E_{I \setminus c})\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I.\end{aligned}$$

他方，定理 3.3.8 により，ℓ 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(\ell)} = (\widetilde{T}_{c,d}^{(\ell)})$ の逆行列は T^{-1} の ℓ 次交代冪行列 $\widetilde{T^{-1}}^{(\ell)}$ と一致する．また，定理 2.5.8 により，ℓ 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(\ell)} = (\widetilde{T}_{c,d}^{(\ell)})$ の逆行列の (c, d) 成分 $(c, d \in \mathscr{C}_\ell^I)$ は，

$$\frac{\mathrm{sgn}_I(c)\mathrm{sgn}_I(d) \det{}_{n-\ell}(E_{I \setminus d}^* T E_{I \setminus c})}{\det{}_n(T)}$$

により与えられる．したがって，

$$\mathbf{1}^{(\ell)} = \det{}_n(T) \sum_{d\in\mathscr{C}_\ell^I} \sum_{c\in\mathscr{C}_\ell^I} \mathrm{sgn}_I(d)(\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|\Gamma(T^{-1})\widetilde{\boldsymbol{e}}_d^I)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I$$
$$= \det{}_n(T)\Gamma(T^{-1})\mathbf{1}^{(\ell)}.$$

両辺に $\Gamma(T)$ を作用させると，条件 (ii) が得られる．

(ii) ⇒ (iii) 条件 (ii) を仮定すると，任意の $c \in \mathscr{C}_{n-\ell}^I$ に対して，

$$(\boldsymbol{e}_I^I|(\Gamma(T)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I) \wedge \mathbf{1}^{(\ell)}) = \frac{1}{\det{}_n(T)}(\boldsymbol{e}_I^I|\Gamma(T)(\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \wedge \mathbf{1}^{(\ell)}))$$
$$= \frac{1}{\det{}_n(T)}(\boldsymbol{e}_I^I|\Gamma(T)\boldsymbol{e}_I^I)(\boldsymbol{e}_I^I|\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \wedge \mathbf{1}^{(\ell)}) = \sum_{d\in\mathscr{C}_\ell^I}(\boldsymbol{e}_I^I|\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \wedge \boldsymbol{e}_d^I)$$
$$= (\boldsymbol{e}_I^I|\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \wedge \boldsymbol{e}_{I\setminus c}^I) = \mathrm{sgn}_I(I\setminus c)(\boldsymbol{e}_I^I|\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \wedge \widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus c}^I)$$
$$= \mathrm{sgn}_I(I\setminus c)\,\mathrm{sgn}_I(c) = (-1)^{\ell(n-\ell)}.$$

この式の最後から 2 番目の等号は補題 2.4.2 により，最後の等号は命題 2.3.8 による．

(iii) ⇔ (iv) つぎの直接計算による．任意の $c \in \mathscr{C}_{n-\ell}^I$ に対して，

$$(\boldsymbol{e}_I^I|(\Gamma(T)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I) \wedge \mathbf{1}^{(\ell)})$$
$$= \sum_{d\in\mathscr{C}_\ell^I}(\boldsymbol{e}_I^I|(\Gamma(T)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I) \wedge \boldsymbol{e}_d^I) = \sum_{d\in\mathscr{C}_\ell^I}(J\Gamma(T)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|\boldsymbol{e}_d^I)$$
$$= \sum_{d\in\mathscr{C}_\ell^I}(-1)^{\ell(n-\ell)}(\widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus d}^I|\Gamma(T)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I) = (-1)^{\ell(n-\ell)} \sum_{d'\in\mathscr{C}_{n-\ell}^I} \widetilde{T}_{d',c}^{(n-\ell)}.$$

(iv) ⇔ (i) 任意の $c, d \in \mathscr{C}_{n-\ell}^I$ に対して，

$$\widetilde{T^*}_{c,d}^{(n-\ell)} = \det{}_{n-\ell}(E_c^* T^* E_d) = \overline{\det{}_{n-\ell}(E_d^* T E_c)} = \overline{\widetilde{T}_{d,c}^{(n-\ell)}}$$

となるから，命題 4.1.1 の条件 (iii) からわかる．■

註 10　命題 4.1.1 の主張 (i) を満たす n 次正方行列 T に関しては，$\ell = 1$ の場合には，n 次正方行列の成分は n^2 個で，条件式は n 個あるから，$n^2 - n$ だけの自由度が残されている．したがって，ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ の固定群の元にはたくさんの候補が存在する．確率行列もその一例である．

同様に，$T^*\mathbf{1}^{(1)} = \det{}_n(T^*)\mathbf{1}^{(1)}$ を満たす正則行列 T もたくさん存在するので，命題 4.1.3 により，ベクトル $\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-1)}$ の固定群の元もたくさん存在する．

一般に，$\ell \neq 1$ の場合には，交代冪行列 $\widetilde{T}^{(\ell)}$ が命題 4.1.1 の主張 (i) を満たす条件式は $\binom{n}{\ell}$ 個だけあり，T の選び方にこれだけの束縛を受ける．したがって，$\ell = 2$ の場合，例えば $n = 3$ ならば，例 2.5.6 で説明したように，T の候補はたくさんある．また，$n = 4$ でも，例えば，行列

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対する 2 次交代冪行列 $\widetilde{T}^{(2)}$ は命題 4.1.1 の条件 (i) を満たしている．しかし，$n \geq 5$ で $\ell = 3$ の場合には，行列の成分は n^2 個，条件式は $\binom{n}{3}$ 個であるから，n は $1 \leq n \leq 8$ を満たさなければ，不等式

$$\binom{n}{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!} \leq n^2$$

は成り立たず，ℓ および $n - \ell$ がともに大きい場合には，条件を満たす ℓ 次または $n - \ell$ 次の交代冪行列は見つけにくくなり，この命題が実際に意味をもつ場合は，自ずと制限を受ける．現時点では詳細不明である．

定理 4.1.4（左乗法性） $1 \leq k < n$ とする．n 次正則行列 T が，任意の行列 $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ に対して，左乗法性

$$\det{}_{n,k}(TX) = \det{}_n(T) \det{}_{n,k}(X)$$

を満たすための必要十分条件は T が $\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}$ の固定群 $S_n^{(n-k)}(\mathbb{C})$ に属することである．

証明 十分性．n 次正則行列 T が $T \in S_n^{(n-k)}(\mathbb{C})$ ならば，$S_n^{(n-k)}(\mathbb{C})$ は群であるから，$T^{-1} \in S_n^{(n-k)}(\mathbb{C})$．ゆえに，$\Gamma(T^{-1})\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}$．よって，任意の行列 $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ に対して，

$$\det{}_{n,k}(TX) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det{}_n((TX, E_{I\setminus c})) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det{}_n(T(X, T^{-1}E_{I\setminus c}))$$

$$
\begin{aligned}
&= \det{}_n(T) \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \det{}_n((X, T^{-1}E_{I\setminus c})) \\
&= \det{}_n(T) \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} (J\pi_k(X)|\pi_{n-k}(T^{-1}E_{I\setminus c})) \\
&= \det{}_n(T) \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} (J\pi_k(X)|\Gamma(T^{-1})\widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus c})) \\
&= \det{}_n(T)(J\pi_k(X)|\Gamma(T^{-1})\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}) \\
&= \det{}_n(T)(J\pi_k(X)|\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}) \\
&= \det{}_n(T)(\mathbf{1}^{(k)}|\pi_k(X)) = \det{}_n(T)\det{}_{n,k}(X)
\end{aligned}
$$

となり，左乗法性が成り立つ．

必要性．上の式の下から 3 行目の式から上へ辿って行き，左乗法性を使って，一番下の最後の式へ移って，下から 2 行目の式に行き着く．したがって，任意の $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\det{}_n(T)(J\pi_k(X)|\Gamma(T^{-1})\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}) &= \det{}_{n,k}(TX) \\
= \det{}_n(T)\det{}_{n,k}(X) &= \det{}_n(T)(J\pi_k(X)|\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}).
\end{aligned}
$$

T は正則であるから，$\det{}_n(T)$ は 0 ではない．両辺をこの数で割ると，任意の $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ に対して，

$$
(J\pi_k(X)|\Gamma(T^{-1})\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}) = (J\pi_k(X)|\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}).
$$

集合 $\{J\pi_k(X) \mid X \in M_{n,k}(\mathbb{C})\}$ はベクトル空間 $J\bigwedge^k \mathbb{C}^n = \bigwedge^{n-k} \mathbb{C}^n$ を張るから，$\Gamma(T^{-1})\widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(n-k)}$．ゆえに，$T^{-1} \in S_n^{(n-k)}(\mathbb{C})$．よって，$T \in S_n^{(n-k)}(\mathbb{C})$．■

系 4.1.5　定理 4.1.4 において，$k = n-1$ の場合には，n 次正方行列 T に対して，$T\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ ならば，すべての $X \in M_{n,n-1}(\mathbb{C})$ に対して，

$$
\det{}_{n,n-1}(TX) = \det{}_n(T)\det{}_{n,n-1}(X).
$$

証明　T が正則な場合は，定理 4.1.4 において $k = n-1$ とすればよい．$T\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ を満たす行列 T が正則でなければ，$\det{}_n(T) = 0$ かつ n 次正

方行列 $T(X, \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})$ も正則ではないから，

$$\det{}_{n,n-1}(TX) = \det{}_n((TX, \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})) = \det{}_n((TX, T\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}))$$
$$= \det{}_n(T(X, \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)})) = 0.$$

よって，乗法性 $\det{}_{n,n-1}(TX) = \det{}_n(T) \det{}_{n,n-1}(X)$ が成り立つ． ■

定理 4.1.4 の結果と，2.4.3 項の行に関する基本変形の所で定義した，対称群 S_n の部分群 $G_{n,k}$ との関係がつぎのようにわかる．

系 4.1.6 $\tau \in S_n$ に対して，$U(\tau) = (\boldsymbol{e}_{\tau(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\tau(n)})$ とする．このとき，$U(\tau) \in S_n^{(n-k)}$ であるための必要十分条件は $\tau \in G_{n,k}$ である．

証明 十分性は命題 2.4.12 の (ii) の証明に使われた式の変形からわかるので，必要性だけを示す．任意の $n \times k$ 行列 X に対して，

$$\det{}_{n,k}(U(\tau)X) = \det{}_n(U(\tau)) \det{}_{n,k}(X)$$

とすれば，2.4.3 項の行に関する基本変形の所で説明したように，行列式の一般展開を使うと，

$$\sum_{\sigma \in S_k^I} \mathrm{sgn}_{n,k}(\tau \cdot \sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(k),k} = \det{}_{n,k}(U(\tau)X)$$
$$= \det{}_n(U(\tau)) \det{}_{n,k}(X) = \mathrm{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_k^I} \mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma) x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(k),k}.$$

行列 X の第 j 列 $(j = 1, \ldots, k)$ の成分のうち，第 $\sigma(j)$ 行目は 0 でなく，それ以外はすべて 0 のものを選ぶと，上の展開式の中で，それに対応する項だけが残る．したがって，任意の $\sigma \in S_k^I$ に対して，

$$\mathrm{sgn}_{n,k}(\tau \cdot \sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)$$

が成り立つ．ゆえに，$\tau \in G_{n,k}$. ■

問題 63 T の各行の成分和がたとえ 1 であっても，正方でない矩形行列の場合には，乗法性が成り立たないような例を挙げよ．

問題 64　n 次正方行列 T が $T\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)} = \widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ を満たせば，

$$\det{}_{n,n-1}(TE_{I\setminus\{i\}}) = (-1)^{n-i}\det{}_n(T)$$

が成り立つことを示せ．

4.2　Cullis 行列式の指向性の左平均

3.4 節において，縦長の $n \times k$ 行列 X の行列式 $\det_{n,k}(X)$ の値は指向性をもつことを示した．ここでは，この Cullis 行列式の指向性を n 次元回転群 $SO(n)$ で座標回転して

$$\int_{SO(n)} \det{}_{n,k}(UX)\, d\nu(U)$$

と平均するとどうなるか調べてみよう．$n = k$ の場合には，この値は正方行列の行列式の乗法性により，$\det_n(X)$ になるので，$k < n$ の場合が問題になる．

まず，例 3.4.3 の 2×1 行列 $X = \cos\theta\, \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_2$ の場合を調べてみる．この場合には，平面の回転を表す回転群 $SO(2)$ の，定義 4.2.1 で与えた記述を用いると，この回転群 $SO(2)$ は

$$\theta \in [0, 2\pi) \longmapsto U_{1,2}(\theta) \in SO(2) \tag{4.1}$$

なる全単射により，区間 $[0, 2\pi)$ と同一視することができる．したがって，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \det{}_{2,1}(U_{1,2}(\theta')X)\, d\theta' \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \det{}_{2,1}(\cos(\theta'+\theta)\,\boldsymbol{e}_1 + \sin(\theta'+\theta)\,\boldsymbol{e}_2)\, d\theta' \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\cos(\theta'+\theta) - \sin(\theta'+\theta)\}\, d\theta' = 0.
\end{aligned}$$

この 2×1 行列の例では平均値が 0 になってしまったが，一般の $n \times k$ 行列の場合に，$SO(n)$ で平均したらどうなるかが，これからの問題である．

2 次元の回転群 $SO(2)$ と違って，一般の n 次元の回転群 $SO(n)$ の場合には，どのように計算したらよいのか，すぐにはわからないので，その準備から始めよう．

4.2.1 球面上の積分

平面や空間を表す極座標

$$(r, \theta), \quad (r, \theta, \varphi)$$

において，方程式 $r = 1$ はそれぞれ単位円周や単位球面を表しているから，上の座標の残りの変数

$$\theta \in [0, 2\pi), \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$$

はそれぞれ，円周（1 次元単位球面 S^1），球面（2 次元単位球面 S^2）の座標と考えることができ，**球面座標**と呼ばれている．

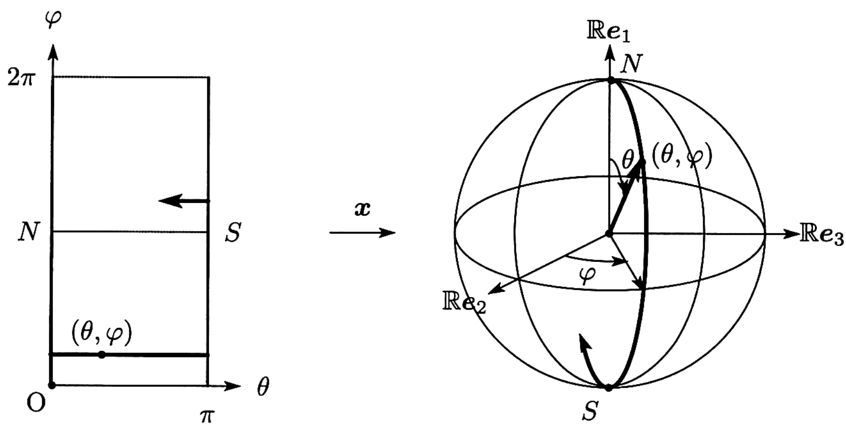


図 4.1　S^2 の球面座標.

例えば，写像

$$\boldsymbol{x} : (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad (4.2)$$

の像が 2 次元単位球面 S^2 を与えている[1]．このとき，これらの単位球面 S^1, S^2 上の回転に関して不変な積分はそれぞれ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}(\theta))\,d\theta, \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}(\theta,\varphi))\,d\varphi\,\sin\theta\,d\theta \tag{4.4}$$

で与えられる．積分記号の前の分数は，被積分関数 f の値が恒等的に 1 のときには，積分の値が 1 となるように，もとの積分をそれぞれ単位円周 S^1 の長さ 2π と単位球面 S^2 の面積 4π で割ったときに現れる規格化定数である．

ここで，単位円周 S^1 上の積分は円周の回転に関して不変であり，対応 (4.1) により，$SO(2)$ 上の不変積分と呼ぶのに相応しいが，2 次元単位球面 S^2 上の積分については，その不変性も，$SO(3)$ 上の積分との関係も，すぐにはわからないので，この項では 2 次元単位球面 S^2 上の不変積分についてだけ説明し，$SO(3)$ 上の不変積分に関しては，続く 2 項に分けて説明する．

まず,「伸縮率」という用語の直感的な説明をする．微分可能な関数 $y = f(x)$ のグラフとして与えられる $\mathbb{R}^2$ における曲線

$$\boldsymbol{x} : x \in D \longmapsto \boldsymbol{x}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

上の点 $\boldsymbol{x}(x)$ における接ベクトル $d\boldsymbol{x}/dx$ は，ベクトル $\boldsymbol{x}(x)$ の各成分の導関数を成分にもつベクトル ${}^t(1, f'(x))$ であるから，その大きさは

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{dx}(x)\right\| = \sqrt{1 + |f'(x)|^2}$$

により与えられる．この値は点 x における「曲線の微小長さ」$\|d\boldsymbol{x}\|$ と「パラメータの微小長さ」dx との比を与えているから，曲線 $x \mapsto \boldsymbol{x}(x)$ の x における伸縮率と考えられる．とくに，単位円周 S^1 の場合，つまり $D = [0, 2\pi)$ かつ $\boldsymbol{x}(x) = {}^t(\cos x, \sin x)$ の場合には，導関数が ${}^t(-\sin x, \cos x)$ となるから，どの点 x でも伸縮率は常に

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{dx}(x)\right\| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$$

[1] 地球儀上で，北極を $\boldsymbol{e}_1$，グリニッジ天文台を通る経度 0 の線と赤道の交点を $\boldsymbol{e}_2$ としたとき，北緯 35°，東経 140° の点は $\theta = 90° - 35°$, $\varphi = 140°$ で表される．

となり，曲線の微小長さとパラメータの微小長さはいつも一致している．

つぎに，(4.2) で与えられる $\mathbb{R}^3$ における単位球面 S^2 の話に移ろう．この場合も同じように考える．この球面は平面ではないから，その上の積分を考えるときには，もとの「パラメータ平面の微小面積」と，曲がった分だけ引き伸ばされたり，縮められたりして決まる「曲面の微小面積」との比である伸縮率が導関数により与えられ，(θ, φ) 平面上で積分するときに，パラメータ平面の微小面積である面積要素 $d\theta\, d\varphi$ に，その伸縮率を重みとして掛け（曲面の微小面積を求め）てから，$d\theta\, d\varphi$ に関して積分すれば，単位球面 S^2 上の積分が得られる．この積分は，この考え方からわかるように，ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする回転に関して不変である．このときの伸縮率は，球面上の点 $\boldsymbol{x}(\theta, \varphi)$ における接ベクトル

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix}$$

のなす平行四辺形の面積により与えられる．これらのベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とすると，その面積は補題 3.1.10 により，外積のノルムの大きさ

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2\| &= \|\boldsymbol{x}_1\| \left\| \boldsymbol{x}_2 - \frac{(\boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{x}_1)}{\|\boldsymbol{x}_1\|^2}\boldsymbol{x}_1 \right\| \\ &= \sqrt{\|\boldsymbol{x}_1\|^2\|\boldsymbol{x}_2\|^2 - (\boldsymbol{x}_2|\boldsymbol{x}_1)^2} = |\sin\theta| \end{aligned}$$

により与えられる．θ が $[0, \pi]$ の範囲では，この絶対値の記号は不要であるから，単位球面 S^2 上で積分するときの面積要素は (4.4) 式のように

$$\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{4.5}$$

により与えられる．上に述べたように，積分は空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする回転に関して不変であったから，この面積要素に対しても同じ不変性が成り立つが，念のために，ここでは，それを計算でも確かめておこう．球面 S^2 上のベクトル $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\theta, \varphi)$ を，$U' \in SO(3)$ を用いて $\boldsymbol{x} \in S^2 \mapsto U'\boldsymbol{x} \in S^2$ と回転すると，U' の成分はどれも θ, φ と無関係であるから，

$$\frac{\partial U'\boldsymbol{x}}{\partial \theta} = U'\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = U'\boldsymbol{x}_1, \quad \frac{\partial U'\boldsymbol{x}}{\partial \varphi} = U'\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} = U'\boldsymbol{x}_2$$

が成り立つ．したがって，

$$\|U'\boldsymbol{x}_1 \wedge U'\boldsymbol{x}_2\| = \|\Gamma(U')(\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2)\| = \|\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2\|$$

となり，(4.5) 式の面積要素は，単位球面 S^2 上の回転 $U' \in SO(3) : \boldsymbol{x} \mapsto U'\boldsymbol{x}$ に関して不変である．したがって，S^2 上の連続な関数 f に対して，

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(U'\boldsymbol{x}(\theta,\varphi))\,d\varphi\,\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}(\theta,\varphi))\,d\varphi\,\sin\theta\,d\theta$$

が成り立つ．

4.2.2　$SO(3)$ のオイラー角

3 次元回転群 $SO(3)$ に関しては，かつてオイラーが地球の形状や歳差運動などの剛体運動を記述する際に導入したオイラー角と呼ばれるパラメータ表示がある．つぎに，このオイラー角が球面座標により与えられることを示そう．

n 次元の回転群 $SO(n)$ の元により与えられる $\mathbb{R}^n$ における回転は，各 $(i,j) \in I^2$ $(i<j)$ に対して，$\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}_j$ の張る 2 次元平面（2 次元部分ベクトル空間 $\mathbb{R}\boldsymbol{e}_i + \mathbb{R}\boldsymbol{e}_{i+1}$）上では通常の正の向きの回転を与え，この平面に垂直な部分ベクトル空間では各点を固定するような直交行列の積として表されることが知られている．

そこで，そのような直交行列を表す記号の準備をする．

定義 4.2.1　各 $(i,j) \in I^2$ $(i<j)$ に対して，n 次直交行列

$$\cos\theta\,(E_{i,i} + E_{i+1,i+1}) + \sin\theta\,(E_{i+1,i} - E_{i,i+1}) + \sum_{j \neq i,i+1} E_{j,j}$$

を $U_{i,j}(\theta)$ で表す．ただし，$E_{i,j}$ は $\mathbb{R}^n$ における行列単位である．

以下の議論の中で最も基本的な役割を果たす補題から始める．

補題 4.2.2　各 $i = 1,\dots,n-1$ に対して，$\mathbb{R}^n$ の零でないベクトル $x_1\boldsymbol{e}_i + x_2\boldsymbol{e}_{i+1}$ の像 $U_{i,i+1}(-\theta)(x_1\boldsymbol{e}_i + x_2\boldsymbol{e}_{i+1})$ が，

(i) $\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\boldsymbol{e}_i$ となる $\theta \in [0,2\pi)$ が一意的に存在する．

(ii) $x_2 \geq 0$ ならば，$\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\boldsymbol{e}_i$ となる $\theta \in [0,\pi]$ が一意的に存在する．

証明 $\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}_{i+1}$ の張る 2 次元平面上の点 (x_1, x_2) を時計回りに $\theta \in [0,2\pi)$ だけ回転させ，$\boldsymbol{e}_i$ 軸上の正の方向へもってくることができるので，(i) がわかる．また，$x_2 \geq 0$ ならば，点 (x_1, x_2) を時計回りに $\theta \in [0,\pi]$ だけ回転させ，$\boldsymbol{e}_i$ 軸上の正の方向へもってくることができるので，(ii) がわかる． ■

命題 4.2.3 空間の回転を表す回転群 $SO(3)$ に対して，写像

$$(\varphi, \theta, \psi) \in [0,2\pi) \times [0,\pi] \times [0,2\pi) \longmapsto U_{2,3}(\varphi)U_{1,2}(\theta)U_{2,3}(\psi) \in SO(3)$$

は全射である．この写像は部分集合 $[0,2\pi) \times (0,\pi) \times [0,2\pi)$ 上では単射であるが，θ が 0 または π となる部分集合上では単射ではない．

証明 $U \in SO(3)$ とする．点 $U\boldsymbol{e}_1$ を $\boldsymbol{e}_1$ 軸を中心に（$\boldsymbol{e}_1$ 軸の正の方向から負の方向を見て）時計回りに $\varphi \in [0,2\pi)$ だけ回転して，$U_{2,3}(-\varphi)U\boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{R}\boldsymbol{e}_1 + \mathbb{R}_+\boldsymbol{e}_2$ を満たすようにする．つぎに，点 $U_{2,3}(-\varphi)U\boldsymbol{e}_1$ の $\boldsymbol{e}_2$ の成分が非負であるから，この点を $\boldsymbol{e}_3$ 軸を中心に（$\boldsymbol{e}_3$ 軸の正の方向から負の方向を見て）時計回りに $\theta \in [0,\pi]$ だけ回転して，

$$U_{1,2}(-\theta)U_{2,3}(-\varphi)U\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$$

となるようにすることができる．このとき，直交行列 $U_{1,2}(-\theta)U_{2,3}(-\varphi)U$ は部分群

$$\{V \in SO(3) \mid V\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1\}\ (\cong SO(2))$$

の元である．これは $\mathbb{R}\boldsymbol{e}_2 + \mathbb{R}\boldsymbol{e}_3$ 上で $SO(2)$ と同じ働きをしているので，$\boldsymbol{e}_1$ 軸を中心に時計回りに $\psi \in [0,2\pi)$ だけ回転して，

$$U_{2,3}(-\psi)U_{1,2}(-\theta)U_{2,3}(-\varphi)U\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2$$

を満たすようにすることができる．このとき，

$$U_{2,3}(-\psi)U_{1,2}(-\theta)U_{2,3}(-\varphi)U\boldsymbol{e}_1 = U_{2,3}(-\psi)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$$

でもある．したがって，直交行列 $U_{2,3}(-\psi)U_{1,2}(-\theta)U_{2,3}(-\varphi)U$ は，命題 1.5.7

により，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ または $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_3)$ と表せる．他方，この直交行列は $SO(3)$ の元であるから，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1_3$ となり，$\mathbb{R}^3$ における恒等変換である．よって，$U = U_{2,3}(\varphi)U_{1,2}(\theta)U_{2,3}(\psi)$ と表せる．

もし

$$U_{2,3}(\varphi)U_{1,2}(\theta)U_{2,3}(\psi) = U_{2,3}(\varphi')U_{1,2}(\theta')U_{2,3}(\psi')$$

ならば，

$$U_{2,3}(\alpha)U_{1,2}(\theta)U_{2,3}(\beta) = U_{1,2}(\theta') \quad (\alpha = \varphi - \varphi',\ \beta = \psi - \psi')$$

となる．この両辺を $\boldsymbol{e}_1$ に作用させると，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \cos\alpha\sin\theta \\ \sin\alpha\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta' \\ \sin\theta' \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで，$\theta, \theta' \in [0, \pi]$ であるから，第 1 成分より，$\theta = \theta'$．したがって，$\theta \in (0, \pi)$ のときは，$\sin\theta \neq 0$ となるから，第 2，第 3 成分より，$\sin\alpha = 0$ かつ $\cos\alpha = 1$．このとき，$\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$ であるから，$\alpha = 0$．したがって，$U_{2,3}(\alpha)U_{1,2}(\theta) = U_{1,2}(\theta')$ となり，$U_{2,3}(\beta) = 1$ かつ $\beta \in (-2\pi, 2\pi)$ が成り立つ．ゆえに，$\beta = 0$．

θ が 0 または π のときは，$U_{2,3}(\alpha)U_{2,3}(\beta) = 1$ となるので，$\varphi - \varphi' + \theta - \theta' = \alpha + \beta$ は $-2\pi, 0, 2\pi$ のいずれかであり，$\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ は一意的には決まらない．

■

ここで得られた $U \in SO(3)$ に対する角 (φ, θ, ψ) を U の**オイラー角**という．

上の証明の内容を見直してみると，つぎのような対応を考えていることがわかる．$SO(3)$ の任意の元 $U = U_{2,3}(\varphi)U_{1,2}(\theta)U_{2,3}(\psi)$ に対して，$\boldsymbol{e}_1$ 軸に関する回転 $U(\psi)$ を与える $SO(3)$ の部分群

$$H = \{V \in SO(3) \mid V\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1\} \cong SO(2) \cong S^1 \tag{4.6}$$

を使うと，商群 $SO(3)/H$ の元が，全単射

$$UH \in SO(3)/H \longmapsto U\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix} \in S^2$$

により，2 次元単位球面 $S^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ 上で対応している点の極座標（曲面座標）(θ, φ) が，オイラー角 (φ, θ) により与えられることがわかる．また，$\psi \in [0, 2\pi)$ は H に対応する 1 次元単位球面（単位円周）S^1 を表す極座標（球面座標）であるから，次項で詳しく説明するように，**「回転群 $SO(3)$ 上の不変積分は**

$$0 \longrightarrow SO(2)(\cong H) \longrightarrow SO(3) \longrightarrow S^2 \longrightarrow 0$$

のように分解して[2]**，$\psi \in [0, 2\pi)$ に関する回転群 $SO(2)(\cong S^1)$ 上の不変積分と，$(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]$ に関する単位球面 S^2 上の不変積分に分けて求めることができる」**．

4.2.3 $SO(3)$ 上の不変積分

いよいよ，$SO(3)$ 上の不変積分を考えよう．オイラー角 (φ, θ, ψ) をもつ回転群 $SO(3)$ の元を U とする．ここで，$SO(3)$ 上の関数 f に対して，(4.6) 式で与えた部分群 $H \cong SO(2)$ 上での平均を

$$f^*(U) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(UU_{2,3}(\psi'))\, d\psi'$$

とする．この関数 f^* は $SO(3)$ の各（左剰余類と呼ばれる）部分集合 $UH = \{UV \mid V \in H\}$ 上では定数値であるから，対応 $SO(3)/H \cong S^2 = \{U\boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{R}^3 \mid U \in SO(3)\}$ を通じて，S^2 上の関数と見ることができる．このとき，$U = U_{2,3}(\varphi)U_{1,2}(\theta)U_{2,3}(\psi)$ に対応する左剰余類 UH により定まるこの球面 S^2 上の点

$$U\boldsymbol{e}_1 = U_{2,3}(\varphi)U_{1,2}(\theta)\boldsymbol{e}_1$$

を球面座標 (θ, φ) を用いて $\boldsymbol{x}(\theta, \varphi)$ で表す．他方，(4.5) 式で与えた単位球面 S^2 上の面積要素 $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ を用いた積分は，$\mathbb{R}^3$ における原点を中心とする回転 $U' \in SO(3) : \boldsymbol{x} \in S^2 \mapsto U'\boldsymbol{x} \in S^2$ に関して不変であったから，この面積要素を使って得られる関数 f^* の積分

[2] 2 つ目の矢印は部分群 H の元をそのまま $SO(3)$ の元に対応させる単射であり，3 つ目の矢印は商写像 $SO(3) \to SO(3)/H$ により定まる全射である．

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^*(\boldsymbol{x}(\theta,\varphi))\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

も回転 $U' \in SO(3) : \boldsymbol{x} \in S^2 \mapsto U'\boldsymbol{x} \in S^2$ に関して不変である．ただし，この積分記号の前の係数は規格化定数（単位球面 S^2 の面積の逆数）である．ここで，上の積分を，ベクトル $\boldsymbol{x}(\theta,\varphi) \in S^2$ を対応する左剰余類 $U_{2,3}(\varphi)U_{1,2}(\theta)H \in SO(3)/H$ と同一視して書き直すと

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^*(U_{2,3}(\varphi)U_{1,2}(\theta))\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\\ =&\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(U_{2,3}(\varphi)U_{1,2}(\theta)U_{2,3}(\psi))\, d\psi\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\end{aligned}$$

となる．これを

$$\int_{SO(3)} f(U)\, d\nu(U)$$

と表し，$SO(3)$ 上の規格不変積分という．ここでの積分の不変性は，上に述べたように，任意の $U' \in SO(3)$ の左からの積に関して

$$\begin{aligned}\int_{SO(3)} f(U'U)\, d\nu(U) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^*(U'\boldsymbol{x}(\theta,\varphi))\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^*(\boldsymbol{x}(\theta,\varphi))\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\\ &= \int_{SO(3)} f(U)\, d\nu(U)\end{aligned}$$

を満たすという意味で，左不変性と呼ばれている．以下の議論では，この左不変性だけしか使わないが，$SO(3)$ 上では左不変性を満たす積分は自動的に右不変性も満たすことが知られているので，以下では左を省いて単に不変性という．

4.2.4　一般の場合（付録 C より）

一般の n 次元の回転群 $SO(n)$ の場合にも，$U \in SO(n)$ は，付録 C の (C.4) 式と定理 C.3.1 で述べるように，$n(n-1)/2$ 個のパラメータからなる高次元のオイラー角

$$\Theta_\ell = (\theta_{\ell,\ell}, \ldots, \theta_{\ell,2}, \theta_{\ell,1}) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi]^{\ell-1} \quad (\ell = 1, \ldots, n-1)$$

を用いて,

$$U = U^{(n-1)}(\Theta_{n-1}) \cdots U^{(2)}(\Theta_2) U^{(1)}(\Theta_1), \tag{4.7}$$

$$U^{(\ell)}(\Theta_\ell) = U_{n-1,n}(\theta_{\ell,\ell}) U_{n-2,n-1}(\theta_{\ell,\ell-1}) \cdots U_{n-\ell,n-\ell+1}(\theta_{\ell,1})$$
$$(\ell = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{4.8}$$

と表せる．しかも，このときのオイラー角を並べ替えた

$$(\theta_{\ell,1}, \theta_{\ell,2}, \ldots, \theta_{\ell,\ell}) \in C_\ell \quad (C_\ell = [0, \pi]^{\ell-1} \times [0, 2\pi))$$

は ℓ 次元単位球面 S^ℓ の点を表す球面座標（極座標）である．したがって，$SO(n)$ の元を記述するオイラー角は単位球面の直積集合 $S^{n-1} \times S^{n-2} \times \cdots \times S^1$ を記述する球面座標の直積集合 $C_{n-1} \times C_{n-2} \times \cdots \times C_1$ の元と見なすことができる．このような視点に立つと,「単位球面 $S^1, S^2, \ldots, S^{n-1}$ 上の回転不変な積分を，この順に繰り返すことにより」，付録 C の面積要素を与える (C.3) 式と規格化された不変積分を与える (C.5) 式を用いることにより，回転群 $SO(n)$ 上の規格化された不変積分を求めることができる．この規格化に使われる ℓ 次元単位球面 S^ℓ の面積 $\mu(S^\ell)$ を求めるために,

$$s_j = \int_0^\pi \sin^j \theta \, d\theta \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

なる量を導入すると，その面積が，C.5 節で示されるように,

$$\mu(S^\ell) = 2 \prod_{j=0}^{\ell-1} s_j \quad (\ell = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$$

により与えられ（それぞれ $2\pi, 4\pi, 2\pi^2, 8\pi^2/3, \pi^3, 16\pi^3/15, \ldots$ である），最終的に，$SO(n)$ 上の規格化された不変積分がつぎのように表せる.

定理 4.2.4 回転群 $SO(n)$ 上の（連続）関数 f の規格化された不変積分は，(4.7) 式と ℓ 次元単位球面 S^ℓ の面積 $\mu(S^\ell)$ を用いて,

$$\frac{1}{\prod_{\ell=1}^{n-1} \mu(S^\ell)} \int_{\prod_{\ell=1}^{n-1} C_\ell} f(U) \prod_{\ell=1}^{n-1} d\mu_\ell(\theta_{\ell,1}, \ldots, \theta_{\ell,\ell})$$

により与えられる．ただし，面積要素 $d\mu_\ell(\theta_{\ell,1},\ldots,\theta_{\ell,\ell})$ は

$$d\theta_{\ell,\ell}\,(\sin\theta_{\ell,\ell-1}d\theta_{\ell,\ell-1})\cdots(\sin^{\ell-2}\theta_{\ell,2}d\theta_{\ell,2})(\sin^{\ell-1}\theta_{\ell,1}d\theta_{\ell,1})$$

である．また，ここでの積分は $n(n-1)/2$ 回の重積分であるが，積分記号は1つにして，積分領域により積分の回数がわかるような表記を用いている．

以後，この規格化された不変積分を

$$\int_{SO(n)} f(U)\,d\nu(U)$$

と記し，$SO(n)$ 上の**規格不変積分**ということにする．

4.2.5　指向性の左平均

以上の準備の下に，この 4.2 節の目標である，つぎの定理を証明する．最初は，オイラー角を使って，回転における平均化や球面上での平均化を導く変換を定義して，それらを余 Cullis 基底へ作用させたときの結果を求めておく．この準備ができてから，行数が $k=1$ の場合と $k\geq 2$ の場合に分けて

$$\int_{SO(n)} \Gamma(U)\boldsymbol{x}\,d\nu(U)=\boldsymbol{0}\quad \left(\boldsymbol{x}\in\bigwedge^k\mathbb{C}^n\right)$$

を証明する．これは「回転群 $SO(n)$ のグラスマン代数への作用 $U\in SO(n)\mapsto \Gamma(U)\in\mathscr{L}(\bigwedge\mathbb{C}^n)$ に関して不動なベクトル全体のなす集合は $\mathbb{C}\Omega$ である」ということとも同値である．この結果からつぎの定理を導くのは容易である．

定理 4.2.5　実 $n\times k$ 行列 X に対して，

$$\int_{SO(n)} \det{}_{n,k}(UX)\,d\nu(U)=\begin{cases}\det{}_n(X) & (n=k)\\ 0 & (n>k)\end{cases}.$$

ただし，積分は $SO(n)$ 上の規格不変積分である．

以下の議論では，内積空間 $\mathscr{V}$ に値をとる関数 $\theta\in[a,b]\mapsto \boldsymbol{y}(\theta)\in\mathscr{V}$ に対して，

$$\int_a^b \boldsymbol{y}(\theta)\,d\theta=\boldsymbol{z}$$

のような積分を用いるが，その意味は，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ に対して，

$$\int_a^b (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}(\theta))\, d\theta = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$$

が成り立つことである．重積分の場合にも同様な意味で積分を考える．

今後の議論では，k ベクトルを回転 $\Gamma(U_{n-1,n}(\theta))$ を用いて単位円周上で平均するか，または回転 $\Gamma(U_{j,j+1}(\theta))$ $(1 \leq j < n-1)$ を用いて半円周上で平均する 2 種類の線形変換をそれぞれ T_1 または T_j とし，それらが余 Cullis 基底の元へ作用したときの結果を詳しく調べる．その結果は次項以降の議論の中で最も基本的な役割を果たす．まず，その定義から始めよう．

定義 4.2.6 k 重外積冪 $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ 上の線形変換 T_j $(j = 1, \ldots, n-1)$ を，各 k ベクトル $\boldsymbol{x} \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ に対して，

$$T_1\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} \Gamma(U_{n-1,n}(\theta))\boldsymbol{x}\, d\theta,$$
$$T_j\boldsymbol{x} = \int_0^{\pi} \Gamma(U_{n-j,n-j+1}(\theta))\boldsymbol{x} \sin^{j-1}\theta\, d\theta \quad (j = 2, \ldots, n-1)$$

で定義する．

このとき，これを繰り返した線形変換 $T_1T_2\cdots T_\ell$ は

$$T_1T_2\cdots T_\ell\boldsymbol{x} = \int_{C_\ell} \Gamma(U^{(\ell)}(\Theta_\ell))\boldsymbol{x}\, d\mu_\ell(\theta_{\ell,1}, \theta_{\ell,2}, \ldots, \theta_{\ell,\ell})$$

と表せる．ただし，ℓ は $1, 2, \ldots, n-1$ のどれかである．以後，これらの積を

$$T^{(\ell)} = T_1T_2\cdots T_\ell$$

と表すことにして，$U \in SO(n)$ のオイラー角表示 (4.7) を使うと，

$$T^{(n-1)}\cdots T^{(2)}T^{(1)} = \int_{\prod_{\ell=1}^{n-1} C_\ell} \Gamma(U) \prod_{\ell=1}^{n-1} d\mu_\ell(\theta_{\ell,1}, \ldots, \theta_{\ell,\ell}) \qquad (4.9)$$

と表せる．

線形変換 $(2\pi)^{-1}T_1$ は，つぎの補題でわかるように，集合

$$\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \mid \{n-1, n\} \subset c \quad \text{または} \quad \{n-1, n\} \cap c = \emptyset\}$$

の生成する $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間への射影である．

補題 4.2.7　$k \geq 2$ かつ $c \in \mathscr{C}_k^I$ とする．このとき，

$$T_1 \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \begin{cases} 2\pi \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I & (\{n-1, n\} \subset c \text{ または } \{n-1, n\} \cap c = \emptyset) \\ \boldsymbol{0} & (\{n-1, n\} \cap c \text{ は } \{n-1\} \text{ または } \{n\}) \end{cases}$$

となる．

証明　c の元を小さい順に並べたものを，$i_1, \ldots, i_k$ とする．$\{n-1, n\} \subset c$ または $\{n-1, n\} \cap c = \emptyset$ ならば，$(i_{k-1}, i_k) = (n-1, n)$ または $i_k \leq n-2$ が成り立つ．この場合には，それぞれ

$$U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_{k-1}} \wedge U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_k} = \det{}_2(U(\theta))\, \boldsymbol{e}_{i_{k-1}} \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} = \boldsymbol{e}_{i_{k-1}} \wedge \boldsymbol{e}_{i_k},$$
$$U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_j} = \boldsymbol{e}_{i_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

ただし，

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} \Gamma(U_{n-1,2n}(\theta))\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I &= U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_k} \\ &= \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} = \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I. \end{aligned}$$

$\Gamma(U_{n-1,n}(\theta))\boldsymbol{e}_c^I$ を $[0, 2\pi)$ 上で積分すると，$T_1 \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = 2\pi \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \mu(S^1)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I$ となる．

$\{n-1, n\} \cap c = \{n-1\}$ の場合には $i_k = n-1$, $i_{k-1} \leq n-2$ となるので，

$$\begin{aligned} \Gamma(U_{n-1,n}(\theta))\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I &= U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_k} \\ &= \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k-1}} \wedge (\cos\theta\, \boldsymbol{e}_{n-1} + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_n) \\ &= \cos\theta\, \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I + \sin\theta\, \widetilde{\boldsymbol{e}}_{(c \setminus \{n-1\}) \cup \{n\}}^I. \end{aligned}$$

したがって，$[0, 2\pi)$ 上で積分すると，$T_1 \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \boldsymbol{0}$.

$\{n-1, n\} \cap c = \{n\}$ のときには $i_k = n$, $i_{k-1} \leq n-2$ となるので，

$$\begin{aligned} \Gamma(U_{n-1,n}(\theta))\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I &= U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge U_{n-1,n}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_k} \\ &= \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k-1}} \wedge (-\sin\theta\, \boldsymbol{e}_{n-1} + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_n) \\ &= -\sin\theta\, \widetilde{\boldsymbol{e}}_{\{n-1\} \cup (c \setminus \{n\})}^I + \cos\theta\, \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I. \end{aligned}$$

ゆえに，上と同様に $[0, 2\pi)$ 上で積分すると，$T_1 \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \boldsymbol{0}$. ■

線形変換 T_j $(j = 2, \ldots, n-1)$ は，つぎの補題でわかるように，余 Cullis 基底上の重み付き変換である．つまり，$c \in \mathscr{C}_k^I$ が $\{n-j, n-j+1\} \subset c$ または $\{n-j, n-j+1\} \cap c = \emptyset$ のときには，ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I$ において固有値 s_{j-1} をもち，$c \cap \{n-j, n-j+1\} = \{n-j\}$ のときには，ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I$ の添え字 c には $n-j+1$ が入っていないので，$n-j$ を $n-j+1$ に変え，重み s_j を付ける．また，$c \cap \{n-j, n-j+1\} = \{n-j+1\}$ のときには，ベクトル $\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I$ の添え字 c に $n-j$ が入っていないので，$n-j+1$ を $n-j$ に変え，重み $-s_j$ を付ける．

補題 4.2.8 $k \geq 2$ かつ $c \in \mathscr{C}_k^I$ とする．各 $j = 2, 3, \ldots, n-1$ に対して，

(i) $\{n-j, n-j+1\} \subset c$ または $\{n-j, n-j+1\} \cap c = \emptyset$ のときには，

$$T_j \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = s_{j-1} \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I.$$

(ii) $\{n-j, n-j+1\} \cap c = \{n-j\}$ のときには，

$$T_j \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = s_j \widetilde{\boldsymbol{e}}_{(c \setminus \{n-j\}) \cup \{n-j+1\}}^I.$$

(iii) $\{n-j, n-j+1\} \cap c = \{n-j+1\}$ のときには，

$$T_j \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = -s_j \widetilde{\boldsymbol{e}}_{\{n-j\} \cup (c \setminus \{n-j+1\})}^I.$$

証明 c の元を小さい順に並べたものを，$i_1, \ldots, i_k$ とする．j は $2, 3, \ldots, n-1$ のいずれかとする．

(i) $\{n-j, n-j+1\} \subset c$ または $\{n-j, n-j+1\} \cap c = \emptyset$ の場合には，補題 4.2.7 の最初の部分の議論と同様にして，

$$\begin{aligned}
&\Gamma(U_{n-j,n-j+1}(\theta)) \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \\
=&U_{n-j,n-j+1}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge U_{n-j,n-j+1}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge U_{n-j,n-j+1}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_k} \\
=&\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} = \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I
\end{aligned}$$

となるので，

$$T_j \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \int_0^{\pi} \Gamma(U_{n-j,n-j+1}(\theta)) \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \sin^{j-1}\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \sin^{j-1}\theta\, d\theta = s_{j-1}\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I.$$

(ii) $\{n-j, n-j+1\} \cap c = \{n-j\}$ の場合には，ある j' に対して $i_{j'} = n-j$, $i_{j'+1} \geq i_{j'} + 2$ となるので，

$$\begin{aligned}
&\Gamma(U_{n-j,n-j+1}(\theta))\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \\
&= \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j'-1}} \wedge U_{n-j,n-j+1}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_{j'}} \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j'+1}} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \\
&= \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j'-1}} \wedge (\cos\theta\, \boldsymbol{e}_{n-j} + \sin\theta\, \boldsymbol{e}_{n-j+1}) \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j'+1}} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \\
&= \cos\theta\, \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I + \sin\theta\, \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{(c\setminus\{n-j\})\cup\{n-j+1\}}.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
T_j\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I &= \int_0^\pi \Gamma(U_{n-j,n-j+1}(\theta))\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \sin^{j-1}\theta\, d\theta \\
&= \int_0^\pi \sin\theta\, \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{(c\setminus\{n-j\})\cup\{n-j+1\}} \sin^{j-1}\theta\, d\theta \\
&= s_j \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{(c\setminus\{n-j\})\cup\{n-j+1\}}.
\end{aligned}$$

(iii) $\{n-j, n-j+1\} \cap c = \{n-j+1\}$ の場合には，ある j' に対して $i_{j'-1} \leq n-j-1$, $i_{j'} = n-j+1$ となるので，

$$\begin{aligned}
&\Gamma(U_{n-j,n-j+1}(\theta))\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \\
&= \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j'-1}} \wedge U_{n-j,n-j+1}(\theta)\boldsymbol{e}_{i_{j'}} \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j'+1}} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \\
&= \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j'-1}} \wedge (-\sin\theta\, \boldsymbol{e}_{n-j} + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_{n-j+1}) \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j'+1}} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \\
&= -\sin\theta\, \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{\{n-j\}\cup(c\setminus\{n-j+1\})} + \cos\theta\, \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
T_j\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I &= \int_0^\pi \Gamma(U_{n-j,n-j+1}(\theta))\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \sin^{j-1}\theta\, d\theta \\
&= \int_0^\pi -\sin\theta\, \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{\{n-j\}\cup(c\setminus\{n-j+1\})} \sin^{j-1}\theta\, d\theta \\
&= -s_j \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{\{n-j\}\cup(c\setminus\{n-j+1\})}.
\end{aligned}$$

■

$k = 1$ の場合の証明

$k = 1$ の場合，つまり，$n \times 1$ 行列 X に対する証明から始めよう．$\boldsymbol{x} = \pi_1(X)$

とする.

補題 4.2.9 $n > 1$ とする. 各 $\ell = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して,

$$T^{(\ell)}\boldsymbol{e}_i = \begin{cases} \mu(S^\ell)\,\boldsymbol{e}_i & (i = 1, \ldots, n-\ell-1) \\ \boldsymbol{0} & (i = n-\ell) \end{cases}.$$

ただし, $\ell = 1$ のときの積分は, $i = n$ のときも $\boldsymbol{0}$ になる.

証明 $T^{(\ell)} = T_1 T_2 \cdots T_\ell$ である. 各 $U_{n-i,n-i+1}(\theta)$ は $\{\boldsymbol{e}_{n-i}, \boldsymbol{e}_{n-i+1}\}^\perp$ 上では恒等変換である. したがって, $U^{(\ell)}(\Theta_\ell)$ は $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-\ell-1}\}$ の生成する部分ベクトル空間上で恒等変換である. よって, $i = 1, \ldots, n-\ell-1$ を添え字にもつ基本ベクトルに対して

$$T^{(\ell)}\boldsymbol{e}_i = \int_{C_\ell} \boldsymbol{e}_i\, d\mu_\ell(\theta_{\ell,1}, \ldots, \theta_{\ell,\ell}) = 2\pi s_1 \cdots s_{\ell-1}\boldsymbol{e}_i = \mu(S^\ell)\boldsymbol{e}_i$$

となる.

つぎに, $T^{(\ell)}\boldsymbol{e}_{n-\ell} = \boldsymbol{0}$ となることを, ℓ に関して帰納的に示す. 補題 4.2.7 により, $\ell = 1$ の場合が成り立つ. つぎに, $\ell - 1$ のときに成り立つことを仮定して, ℓ の場合にも成り立つことを示す. 補題 4.2.8 の (ii) の証明と同じ議論により,

$$T_\ell \boldsymbol{e}_{n-\ell} = \int_0^\pi U_{n-\ell,n-\ell+1}(\theta)\boldsymbol{e}_{n-\ell} \sin^{\ell-1}\theta\, d\theta = s_\ell \boldsymbol{e}_{n-\ell+1}.$$

したがって, 帰納法の仮定を使うと,

$$T^{(\ell)}\boldsymbol{e}_{n-\ell} = T_1 T_2 \cdots T_\ell \boldsymbol{e}_{n-\ell} = s_\ell T^{(\ell-1)}\boldsymbol{e}^I_{n-(\ell-1)} = \boldsymbol{0}.$$

最後に, $\ell = 1$ のときには, 補題 4.2.7 により, $T^{(1)}\boldsymbol{e}_n = T_1\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$ となる.

■

定理 4.2.10 $n > 1$ とする. このとき, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$\int_{SO(n)} U\boldsymbol{x}\, d\nu(U) = \boldsymbol{0}$$

となる.

証明　$U \in SO(n)$ のオイラー角表示を，(4.7) 式のように，

$$U = U^{(n-1)}(\Theta_{n-1}) \cdots U^{(2)}(\Theta_2) U^{(1)}(\Theta_1)$$

とする．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して，

$$\int_{\prod_{\ell=1}^{n-1} C_\ell} U\boldsymbol{x} \prod_{\ell=1}^{n-1} d\mu(\theta_{\ell,1}, \ldots, \theta_{\ell,\ell}) = \mathbf{0} \tag{4.10}$$

となることを示せばよい．

まず，添え字が $i \in \{n-1, n\}$ の場合には，補題 4.2.7 により，

$$T^{(1)}\boldsymbol{e}_i = T_1\boldsymbol{e}_i = \mathbf{0} \quad (i = n-1, n).$$

つぎに，

$$T^{(\ell)} \cdots T^{(2)} T^{(1)} \boldsymbol{e}_i = \mathbf{0} \quad (i = n-\ell, \ldots, n-1, n) \tag{4.11}$$

が成り立つことを，ℓ に関して帰納的に示す．$\ell = 1$ の場合は上で説明済みである．つぎに，$\ell \geq 2$ の場合を考える．いま，$\ell - 1$ のときに，(4.11) 式

$$T^{(\ell-1)} \cdots T^{(2)} T^{(1)} \boldsymbol{e}_i = \mathbf{0} \quad (i = n-\ell+1, \ldots, n-1, n)$$

が成り立つとする．この式に $T^{(\ell)}$ を作用させると，同じ添え字のベクトルに対して，

$$T^{(\ell)} T^{(\ell-1)} \cdots T^{(2)} T^{(1)} \boldsymbol{e}_i = \mathbf{0} \quad (i = n-\ell+1, \ldots, n-1, n)$$

となる．また，$U^{(\ell-1)}(\Theta_{\ell-1}) \cdots U^{(1)}(\Theta_1)$ は $\{\boldsymbol{e}_{n-\ell+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}^\perp$ 上では恒等変換である．基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{n-\ell}$ はこの直交補空間の元であるから，

$$T^{(\ell-1)} \cdots T^{(2)} T^{(1)} \boldsymbol{e}_{n-\ell} = \left(\prod_{j=1}^{\ell-1} \mu(S^j) \right) \boldsymbol{e}_{n-\ell}.$$

よって，添え字が $i = n - \ell$ の場合にも，$\ell \geq 2$ であることに留意すれば，補題 4.2.9 により，$T^{(\ell)}\boldsymbol{e}_{n-\ell} = \mathbf{0}$ となる．したがって，

$$T^{(\ell)} T^{(\ell-1)} \cdots T^{(2)} T^{(1)} \boldsymbol{e}_{n-\ell} = \left(\prod_{j=1}^{\ell-1} \mu(S^j) \right) T^{(\ell)} \boldsymbol{e}_{n-\ell} = \mathbf{0}.$$

よって，(4.11) 式が帰納的に示された．この (4.11) 式で，$\ell = n-1$ の場合を考えれば，(4.10) 式において，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を自然基底の元に置き換えた式が成り立つ．したがって，積分の線形性により，(4.10) 式が，任意の $\boldsymbol{x}$ に対しても成り立つ． ■

$k \geq 2$ の場合の証明

つぎに，$k \geq 2$ の場合の証明をする．その際，添え字の集合 $\mathscr{C}_k^I$ をつぎのように，分割して考える．

集合 $\{1, 2, \ldots, m\}$ を I_m で表すことにする．このとき，$I_n = I$ である．つぎに，

$$\mathscr{D}_k^{I_m} = \{c \in \mathscr{C}_k^{I_m} \mid m \in c\} \quad (m = k, k+1, \ldots, n)$$

とすれば，

$$\mathscr{C}_k^I = \bigcup_{m=k}^{n} \mathscr{D}_k^{I_m}$$

と表せる．

補題 4.2.11　$c \in \mathscr{D}_k^I \cup \mathscr{D}_k^{I_{n-1}}$ ならば，

$$T^{(1)}\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \boldsymbol{0}.$$

証明　$c \in \mathscr{D}_k^I \setminus \mathscr{D}_k^{I_{n-1}}$ とすると，$n-1 \notin c$ かつ $n \in c$ となるので，補題 4.2.7 により，$T^{(1)}\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \boldsymbol{0}$.

$c \in \mathscr{D}_k^{I_{n-1}}$ とすると，$\{n-1, n\} \cap c = \{n-1\}$ であるから，補題 4.2.7 により，$T^{(1)}\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \boldsymbol{0}$. ■

補題 4.2.12　$c \in \mathscr{D}_k^{I_{n-m}}$ $(m = 2, 3, \ldots, n-k)$ ならば，

$$T^{(m)}T^{(m-1)} \cdots T^{(1)}\widetilde{\boldsymbol{e}_c}^I = \boldsymbol{0}.$$

証明　$c \in \mathscr{D}_k^{I_{n-m}}$ とする．$U^{(m-1)}(\Theta_{m-1}) \cdots U^{(1)}(\Theta_1)$ は $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-m}\}$ の生成する部分ベクトル空間上で恒等変換であるから，

$$T^{(m-1)} \cdots T^{(1)}\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \prod_{\ell=1}^{m-1} \mu(S^\ell)\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I.$$

また，T_m は $\Gamma(U_{n-m,n-m+1}(\theta))$ の作用の重み付き平均である．いま，$c \cap \{n-m, n-m+1\} = \{n-m\}$ であるから，補題 4.2.8 の (ii) により，

$$\begin{aligned} T^{(m)}\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I &= T_1 T_2 \cdots T_m \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \\ &= s_m T_1 T_2 \cdots T_{m-1} \widetilde{\boldsymbol{e}}_{(c \setminus \{n-m\}) \cup \{n-m+1\}} \end{aligned}$$

となる．$(c \setminus \{n-m\}) \cup \{n-m+1\}) \cap \{n-m+1, n-m+2\} = \{n-m+1\}$ であるから，再び補題 4.2.8 の (ii) により，

$$T_{m-1} \widetilde{\boldsymbol{e}}_{(c \setminus \{n-m\}) \cup \{n-m+1\}} = s_{m-1} \widetilde{\boldsymbol{e}}_{(c \setminus \{n-m\}) \cup \{n-m+2\}}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} T^{(m)}\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I &= T_1 T_2 \cdots T_m \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \\ &= s_m T_1 T_2 \cdots T_{m-1} \widetilde{\boldsymbol{e}}_{(c \setminus \{n-m\}) \cup \{n-m+1\}} \\ &= s_m s_{m-1} T_1 T_2 \cdots T_{m-2} \widetilde{\boldsymbol{e}}_{(c \setminus \{n-m\}) \cup \{n-m+2\}}. \end{aligned}$$

以下，同様な議論を繰り返すと，

$$T^{(m)}\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \Bigl(\prod_{\ell=2}^{m} s_\ell\Bigr) T_1 \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{(c \setminus \{n-m\}) \cup \{n-1\}}$$

となる．ここで，$(c \setminus \{n-m\}) \cup \{n-1\}) \cap \{n-1, n\} = \{n-1\}$ であるから，補題 4.2.7 により，$T_1 \widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{(c \setminus \{n-m\}) \cup \{n-1\}} = \boldsymbol{0}$．ゆえに，

$$\begin{aligned} T^{(m)} \cdots T^{(1)} \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I &= \Bigl(\prod_{\ell=1}^{m-1} \mu(S^\ell)\Bigr) T^{(m)} \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I \\ &= \frac{1}{2\pi} \Bigl(\prod_{\ell=1}^{m} \mu(S^\ell)\Bigr) T_1 \widetilde{\boldsymbol{e}}_{(c \setminus \{n-m\}) \cup \{n-1\}} = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$ ■

補題 4.2.11 と補題 4.2.12 の結果をまとめると，

定理 4.2.13　任意の k ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，

$$\int_{SO(n)} \Gamma(U) \boldsymbol{x} \, d\nu(U) = \boldsymbol{0}.$$

証明　$c \in \mathscr{C}_k^I$ ならば，$c \in \mathscr{D}_k^{I_{n-1}} \cup \mathscr{D}_k^I$ または $c \in \mathscr{D}_k^m$ $(m = 2, \dots, n-k)$.

$c \in \mathscr{D}_k^{I_{n-1}} \cup \mathscr{D}_k^I$ の場合には，補題 4.2.11 により，

$$T^{(n-1)} \cdots T^{(1)} \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = T^{(n-1)} \cdots T^{(2)} \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

$c \in \mathscr{D}_k^m$ $(m = 2, \ldots, n-k)$ の場合には，補題 4.2.12 により，

$$T^{(n-1)} \cdots T^{(1)} \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = T^{(n-1)} \cdots T^{(m+1)} \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

よって，余 Cullis 基底の任意の元に対して，$T^{(n-1)} \cdots T^{(1)} \widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I = \boldsymbol{0}$ となるので，任意の k ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対しても，$T^{(n-1)} \cdots T^{(1)} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．ゆえに，(4.9) 式により，

$$\int_{\prod_{\ell=1}^{n-1} C_\ell} \varGamma(U) \boldsymbol{x} \prod_{\ell=1}^{n-1} d\mu(\theta_{\ell,1}, \ldots, \theta_{\ell,\ell}) = T^{(n-1)} \cdots T^{(1)} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

この式の両辺を $\prod_{\ell=1}^{n-1} \mu(S^\ell)$ で割ることにより，定理の式が得られる． ■

定理 4.2.4 の証明 $n = k$ の場合は正方行列の積の乗法性から明らかである．そこで，$n > k$ の場合には，定理 4.2.10 と定理 4.2.13 により，次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_{SO(n)} \det{}_{n,k}(UX)\, d\nu(U) &= \int_{SO(n)} (\boldsymbol{1}^{(k)} | \varGamma(U) \pi_k(X))\, d\nu(U) \\ &= \Big(\boldsymbol{1}^{(k)} \,\Big|\, \int_{SO(n)} \varGamma(U) \pi_k(X)\, d\nu(U)\Big) = 0.\end{aligned}$$ ■

4.3 積み上げ行列の行列式

正方行列を積み重ねて得られる矩形行列の行列式の値が，これまでにも目的に応じてさまざまに定義され，利用されてきているが，具体例の計算結果を比較してみると，Cullis の行列式とは違っているようである．ここでは同一の行列を積み上げて得られる矩形行列の行列式だけを扱っているが，その値は最初の行列式の行と列の数，および積み重ねの数によって，ある規則に従ってさまざまに変化するので，何らかの幾何学的背景があるものと推測されるが，その数学的な意味はまだ解明されていない．

4.3.1　単位行列の積み上げ行列

$\ell \times k$ 行列 Y のコピーを m 個積み上げて得られる行列を $Y^{[m]}$ で表すことにする．つまり

$$Y^{[m]} = \begin{pmatrix} Y \\ Y \\ \vdots \\ Y \end{pmatrix}$$

である．上から β 番目の Y の場所を β 番目のブロックということにする．

問題 65　つぎの行列の行列式の値を求めよ．

(i) $\mathbb{C}^4$ において，$1_2^{[2]} = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4)$.

(ii) $\mathbb{C}^6$ において，$1_2^{[3]} = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_5, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_6)$.

(iii) $\mathbb{C}^6$ において，$1_3^{[2]} = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_5, \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_6)$.

(iv) $\mathbb{C}^9$ において，$1_3^{[3]} = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_7, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_5 + \boldsymbol{e}_8, \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_6 + \boldsymbol{e}_9)$.

いま，ベクトル空間 $\mathbb{C}^\ell$ 上の単位行列を 1_ℓ で表し，$X = 1_\ell^{[m]}$ とする．つぎに，$m\ell$ を n とすれば，$X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell)$ は $n \times \ell$ 行列で，各列は

$$\boldsymbol{x}_i = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{e}_{\ell(j-1)+i} \quad (i = 1, 2, \ldots, \ell)$$

と表せる．$k \leq \ell$ のとき，$d \in \mathscr{C}_k^L$ ならば，E_d^L は $\ell \times k$ 行列であるから，行列

$$XE_d^L = (E_d^L)^{[m]}$$

は $n \times k$ 行列である．この項の目標は，この矩形行列の行列式の値を計算することである．

さて，$d \in \mathscr{C}_k^L$ の元を小さい順に並べたものを $i_1, \ldots, i_k$ とすれば，$X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell)$ であったから，$XE_d^L = (\boldsymbol{x}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_k})$ と表せる．したがって，

$$\det{}_{n,k}((E_d^L)^{[m]}) = \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} (\boldsymbol{e}_c^I | \boldsymbol{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{i_k}).$$

ここで，$(E_d^L)^{[m]}$ を組み立てている各 E_d^L をブロックと呼び，上から順番に番号付けてその位置を表すものとする．このブロックの位置の組み合わせを

指定する添え字 $(j_1,\dots,j_k)\in\{1,2,\dots,m\}^k$ に対して，d に依存して決まる k 重外積冪 $\bigwedge^k\mathbb{C}^n$ の元

$$\boldsymbol{e}_{\ell(j_1-1)+i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{\ell(j_2-1)+i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{\ell(j_k-1)+i_k}$$

を $\boldsymbol{e}^d(j_1,j_2,\dots,j_k)$ で表すことにすれば，

$$\boldsymbol{x}_{i_1}\wedge\boldsymbol{x}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_{i_k}=\sum_{(j_1,\dots,j_k)\in\{1,2,\dots,m\}^k}\boldsymbol{e}^d(j_1,j_2,\dots,j_k)$$

と展開される．以下の議論では，この表示を用いる．

補題 4.3.1 $d\in\mathscr{C}_k^L$ の元を小さい順に並べたものを $i_1,\dots,i_k$ とする．各 $(j_1,j_2,\dots,j_k)\in\{1,2,\dots,m\}^k$ に対して，単射 $\sigma\in S_k^I$ をつぎの式

$$\sigma(\alpha)=\ell(j_\alpha-1)+i_\alpha\quad(\alpha\in K)$$

で定めれば，

$$\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}(\boldsymbol{e}_c^I|\boldsymbol{e}^d(j_1,j_2,\dots,j_k))=\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma).$$

証明 与えられた σ に対して，$\sigma(K)$ の元を小さい順に並べたものを $\ell_1,\dots,\ell_k$ とすれば，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^I_{\sigma(K)}&=\mathrm{sgn}_I(\sigma(K))\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{\sigma(K)}=\mathrm{sgn}_I(\sigma(K))\boldsymbol{e}_{\ell_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{\ell_k}\\&=\mathrm{sgn}_I(\sigma(K))\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}\ell_1&\cdots&\ell_k\\\sigma(1)&\cdots&\sigma(k)\end{pmatrix}\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{\sigma(k)}\\&=\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{\sigma(k)}=\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)\boldsymbol{e}^d(j_1,j_2,\dots,j_k)\end{aligned}$$

が成り立つので，$\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I}(\boldsymbol{e}_c^I|\boldsymbol{e}^d(j_1,j_2,\dots,j_k))=\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)$. ■

この補題において，$d\in\mathscr{C}_k^L$ と $(j_1,j_2,\dots,j_k)\in\{1,2,\dots,m\}^k$ に対して決められた単射 $\sigma\in S_k^I$ を，**$\boldsymbol{d}$ と $(\boldsymbol{j_1},\boldsymbol{j_2},\dots,\boldsymbol{j_k})$ に対応する単射**ということにする．

補題 4.3.2 $k\geq 2$ とする．$d\in\mathscr{C}_k^L$ の元を小さい順に並べたものを $i_1,\dots,i_k$ とする．もし $(j_1,j_2,\dots,j_k)\in\{1,2,\dots,m\}^k$ において $j_{k-1}=j_k$ ならば，

$$\sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} (\boldsymbol{e}_c^I | \boldsymbol{e}^d(j_1, j_2, \ldots, j_k)) = (-1)^{i_{k-1}+i_k-1} \sum_{e \in \mathscr{C}_{k-2}^I} (\boldsymbol{e}_e^I | \boldsymbol{e}^{d'}(j_1, \ldots, j_{k-2})).$$

ただし，$d' = d \setminus \{i_{k-1}, i_k\} \in \mathscr{C}_{k-2}^L$.

証明　d と $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ に対応する単射 $\sigma \in S_k^I$ に対して，その定義域を $K \setminus \{k-1, k\}$ へ制限したものを σ' とすれば，σ' は $d' \in L \setminus \{i_{k-1}, i_k\}$ と $(j_1, j_2, \ldots, j_{k-2})$ に対応する単射である．また，上の式の左辺の和で 0 でない項は，c が $\sigma(K)$ の場合だけであり，右辺の和で 0 でない項は，e が $\sigma(K \setminus \{k-1, k\})$ の場合だけであるから，

$$(\boldsymbol{e}_{\sigma(K)}^I | \boldsymbol{e}^d(j_1, \ldots, j_k)) = (-1)^{i_{k-1}+i_k-1} (\boldsymbol{e}_{\sigma(K \setminus \{k-1,k\})}^I | \boldsymbol{e}^{d'}(j_1, \ldots, j_{k-2}))$$

が成り立つことを示せばよい．いま，$c = \sigma(K)$, $e = \sigma'(K \setminus \{k-1, k\})$ とする．まず，これらの Cullis 符号を計算すると，

$$\mathrm{sgn}_I(c) = (-1)^{\ell \sum_{\alpha=1}^{k} (j_\alpha - 1) + \sum_{\alpha=1}^{k} (i_\alpha - \alpha)},$$
$$\mathrm{sgn}_I(e) = (-1)^{\ell \sum_{\alpha=1}^{k-2} (j_\alpha - 1) + \sum_{\alpha=1}^{k-2} (i_\alpha - \alpha)}.$$

この補題では $j_{k-1} = j_k$ を仮定しているので，

$$\mathrm{sgn}_I(c) = (-1)^{i_{k-1}+i_k-1} \mathrm{sgn}_I(e)$$

となる．

つぎに，c の元を小さい順に並べたものを $\beta_1, \ldots, \beta_k$ とし，e の元を小さい順に並べたものを $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-2}$ とする．仮定により $j_{k-1} = j_k$ でありしかも i_{k-1} と i_k は d の中で一番大きい方の 2 数であるから，2 つの添え字 $\sigma(k-1)$ と $\sigma(k)$ は共に同じ j_{k-1} 番目のブロックに属していて，列 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ の中で隣り合わせに並んでいる．この 2 つの添え字を隣接互換を繰り返して，右端へ移動させることにより，この列 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ を $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-2}, \sigma(k-1), \sigma(k)$ と並べ替えることができる．このときの隣接互換の回数は，隣り合わせの 2 つを隣り合わせの 2 つに移動させるのであるから，必ず偶数回である．したがって，

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_k \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \end{pmatrix} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_{k-2} \\ \sigma'(1) & \cdots & \sigma'(k-2) \end{pmatrix}.$$

ゆえに，単射の符号 $\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)$ と $\mathrm{sgn}_{n,k-2}(\sigma')$ の違いは，Cullis 符号 $\mathrm{sgn}_I(c)$ と $\mathrm{sgn}_I(e)$ の違い $(-1)^{i_{k-1}+i_k-1}$ と一致している．よって，

$$\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma) = (-1)^{i_{k-1}+i_k-1}\mathrm{sgn}_{n,k-2}(\sigma').$$

ここで，前の補題 4.3.1 の結果を使うと，この補題の証明が得られる． ■

補題 4.3.3 各 $d \in \mathscr{C}_k^L$ に対して，もし $j \neq j'$ ならば，

$$\sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \{(\boldsymbol{e}_c^I|\boldsymbol{e}^d(j_1,\ldots,j_{k-2},j,j')) + (\boldsymbol{e}_c^I|\boldsymbol{e}^d(j_1,\ldots,j_{k-2},j',j))\} = 0.$$

証明 d と $\{1,2,\ldots,m\}^k$ の 2 つの元

$$(j_1,\ldots,j_{k-2},j,j'), \quad (j_1,\ldots,j_{k-2},j',j)$$

に対応する単射をそれぞれ σ, σ' とする．σ, $\sigma' \in S_k^I$ であるから，$c = \sigma(K)$, $c' = \sigma'(K)$ とすれば，c, $c' \in \mathscr{C}_k^I$．このとき，$\sigma(K \setminus \{k-1,k\}) = \sigma'(K \setminus \{k-1,k\})$ であるから，これを c_0 とすれば，

$$c = c_0 \cup \{\ell(j-1)+i_{k-1}, \ell(j'-1)+i_k\},$$
$$c' = c_0 \cup \{\ell(j'-1)+i_{k-1}, \ell(j-1)+i_k\}$$

である．このとき，これらの Cullis 符号 $\mathrm{sgn}_I(c)$ と $\mathrm{sgn}_I(c')$ は一致する．ところが，$j \neq j'$ であるから，違いは，添え字の最後の 2 つが属するブロックの順序が入れ替わっているだけである．したがって，補題の和の中で 0 でない 2 項

$$(\boldsymbol{e}_c^I|\boldsymbol{e}^d(j_1,\ldots,j_{k-2},j,j')), \quad (\boldsymbol{e}_{c'}^I|\boldsymbol{e}^d(j_1,\ldots,j_{k-2},j',j))$$

の違いは，その 2 つの添え字が属するブロックの互換の符号だけであることがわかる．したがって，$\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma) = -\mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma')$ となり，補題が成立する．

■

定理 4.3.4 $1 \leq k \leq \ell \leq n$ かつ $n = \ell m$ とする．もし $d \in \mathscr{C}_k^L$ ならば，

$$\det{}_{n,k}((E_d^L)^{[m]}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}_I(d) m^{[k/2]} & (k(n-k) \text{ が偶数}) \\ \mathrm{sgn}_I(d) m^{(k+1)/2} & (k(n-k) \text{ が奇数，} \ell \text{ が偶数}) \\ 0 & (k(n-k) \text{ が奇数，} \ell \text{ が奇数}) \end{cases}.$$

ただし，$[k/2]$ は $k/2$ の整数部分である．とくに，$\ell = k$ ならば，$E_d^L = 1_k$ かつ

$$\det{}_{n,k}(1_k^{[m]}) = \begin{cases} m^{[k/2]} & (k \text{ が偶数または } m \text{ が奇数}) \\ 0 & (k \text{ が奇数かつ } m \text{ が偶数}) \end{cases}.$$

証明　d の元を小さい順に並べたものを $i_1, \ldots, i_k$ とする．補題 4.3.1 の直前で示したように，

$$\begin{aligned} \det{}_{n,k}((E_d^L)^{[m]}) &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} (\boldsymbol{e}_c^I | \boldsymbol{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{i_k}) \\ &= \sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \sum_{(j_1, \ldots, j_k) \in \{1, \ldots, m\}^k} (\boldsymbol{e}_c^I | \boldsymbol{e}^d(j_1, j_2, \ldots, j_k)) \end{aligned}$$

と展開される．補題 4.3.3 で示したように，右辺で添え字の最後の 2 つ j_{k-1}, j_k が違う場合には，それを入れ替えるとベクトルの符号が変わることを示したので，このように最後の 2 つの添え字が違っている項の総和は 0 になる．ゆえに，右辺は

$$\sum_{c \in \mathscr{C}_k^I} \sum_{(j_1, \ldots, j_{k-2}) \in \{1, \ldots, m\}^{k-2}} \sum_{j=1}^{m} (\boldsymbol{e}_c^I | \boldsymbol{e}^d(j_1, j_2, \ldots, j_{k-2}, j, j))$$

と表せる．この式に補題 4.3.2 を適用すると，列の長さが 2 だけ減って，

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} \sum_{e \in \mathscr{C}_{k-2}^I} \sum_{(j_1, \ldots, j_{k-2}) \in \{1, \ldots, m\}^{k-2}} (-1)^{i_{k-1} + i_k - 1} (\boldsymbol{e}_e^I | \boldsymbol{e}^{d'}(j_1, \ldots, j_{k-2})) \\ =&(-1)^{i_{k-1} + i_k - 1} m \sum_{e \in \mathscr{C}_{k-2}^I} (\boldsymbol{e}_e^I | \boldsymbol{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{i_{k-2}}) \\ =&(-1)^{i_{k-1} + i_k - 1} m \det{}_{n,k-2}((E_{d'}^L)^{[m]}) \end{aligned}$$

となる．ただし，$d' = d \setminus \{i_{k-1}, i_k\} \in \mathscr{C}_{k-2}^L$ である．ここで，i_{k-1}, i_k は d の中で一番大きい方の 2 つであるから，$\ell \times (k-2)$ 行列 $E_{d'}^L$ の最後の第 $(\ell - 1)$

行と第 ℓ 行は零ベクトルになっている．命題 2.4.12 により，隣接する 2 つの行が零ベクトルの場合には，それを取り除いても，行列式の値は変わらないことがわかるので，

$$\det{}_{n,k-2}((E_{d'}^{L})^{[m]}) = \det{}_{n-2m,k-2}((E_{d'}^{L\setminus\{\ell-1,\ell\}})^{[m]})$$

となる．ただし，$E_{d'}^{L\setminus\{\ell-1,\ell\}}$ は $(\ell-2)\times(k-2)$ の部分行列

$$(E_{L\setminus\{\ell-1,\ell\}}^{L})^{*}E_{d}^{L}E_{d'}^{K}$$

である．ゆえに，最初の行列式 $\det{}_{n,k}((E_d^L)^{[m]})$ の値は，この行列を積み重ねて得られる部分行列の行列式

$$(-1)^{i_{k-1}+i_k-1}m\det{}_{n-2m,k-2}((E_{d'}^{L\setminus\{\ell-1,\ell\}})^{[m]})$$

の計算に帰着される．

ここで，$k-2\beta\geq 0$ を満たす $\beta=0,1,2,\ldots$ に対して，

$$L(\beta)=\{1,2,\ldots,\ell-2\beta\},\quad d(\beta)=\{i_1,i_2,\ldots,i_{k-2\beta}\}$$

とすれば，$L(1)=L\setminus\{\ell-1,\ell\}$ かつ $d(1)=d'$.

まず，k が偶数の場合に，上の議論を繰り返す．$L((k/2)-1)=\{1,\ldots,\ell-k+2\}$ かつ $d((k/2)-1)=\{i_1,i_2\}$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\det{}_{n,k}((E_d^L)^{[m]})\\
=&(-1)^{i_{k-1}+i_k-1}m\det{}_{n-2m,k-2}((E_{d(1)}^{L(1)})^{[m]})\\
=&(-1)^{\sum_{j=k-3}^{k}(i_j-j)}m^2\det{}_{n-4m,k-4}((E_{d(2)}^{L(2)})^{[m]})\\
&\vdots\\
=&(-1)^{\sum_{j=3}^{k}(i_j-j)}m^{(k/2)-1}\det{}_{m(\ell-k+2),2}((E_{\{i_1,i_2\}}^{\{1,\ldots,\ell-k+2\}})^{[m]}).
\end{aligned}$$

ここで，

$$\det{}_{m(\ell-k+2),2}((E_{\{i_1,i_2\}}^{\{1,\ldots,\ell-k+2\}})^{[m]}) = \sum_{e\in\mathscr{C}_2^{I'}}\sum_{j_1,j_2=1}^{m}(\boldsymbol{e}_e^{I'}|\boldsymbol{e}^{\{i_1,i_2\}}(j_1,j_2))$$

と表せる．ただし，$I'=\{1,2,\ldots,m(\ell-k+2)\}$．補題 4.3.3 により，右辺

において，$j_1 \neq j_2$ の場合の総和は 0 になるので，

$$\det{}_{m(\ell-k+2),2}((E_{\{i_1,i_2\}}^{\{1,\dots,\ell-k+2\}})^{[m]}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{e\in\mathscr{C}_2^{I'}} (e_e^{I'}|e^{\{i_1,i_2\}}(j,j))$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{\{(\ell-k+2)(j-1)+i_1-1\}+\{(\ell-k+2)(j-1)+i_2-2\}}$$

$$=m(-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)}.$$

ゆえに，

$$\det{}_{n,k}((E_d^L)^{[m]}) = (-1)^{\sum_{j=1}^{k}(i_j-j)}m^{k/2} = \mathrm{sgn}_I(d)m^{k/2}.$$

k が奇数の場合にも，上の議論を繰り返すと

$$\det{}_{n,k}((E_d^L)^{[m]})$$
$$=m^{(k-1)/2}(-1)^{\sum_{j=2}^{k}(i_j-j)}\det{}_{m(\ell-k+1),1}((E_{\{i_1\}}^{\{1,2,\dots,\ell-k+1\}})^{[m]}).$$

行列 $(E_{\{i_1\}}^{\{1,2,\dots,\ell-k+1\}})^{[m]}$ の第 1 ブロックは $(\ell-k+1)\times 1$ の行列で，その第 i_1 行は 1 で，それ以外は 0 である．したがって，

$$\det{}_{n,k}((E_d^L)^{[m]}) = (-1)^{\sum_{j=2}^{k}(i_j-j)}m^{(k-1)/2}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{(\ell-k+1)(j-1)+(i_1-1)}$$
$$= (-1)^{\sum_{j=1}^{k}(i_j-j)}m^{(k-1)/2}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{\ell(j-1)}$$
$$= \mathrm{sgn}_I(d)m^{(k-1)/2}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{\ell(j-1)}.$$

上の結果を踏まえて，内容を整理する．

k が偶数の場合は上の結果がそのまま使える．

$n-k$ が偶数で，k が奇数の場合には，$n=\ell m$ が奇数になるので，ℓ も m もともに奇数であり，$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{\ell(j-1)}=1$ となる．ゆえに，$\det{}_{n,k}((E_d^L)^{[m]}) = \mathrm{sgn}_I(d)m^{[k/2]}$.

k と $n-k$ がともに奇数の場合には，$n=\ell m$ が偶数になる．ℓ が偶数のときには，$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{\ell(j-1)}=m$ となるので，$\det{}_{n,k}((E_d^L)^{[m]}) = \mathrm{sgn}_I(d)m^{(k+1)/2}$.
また，ℓ が奇数のときには，n が偶数であるから，m も偶数であり，

$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{\ell(j-1)}=0$ となるので，$\det_{n,k}((E_d^L)^{[m]})=0$.

最後に，特別な $\ell=k$ の場合を考える．$n-k=k(m-1)$ が偶数ならば，自動的に $k(n-k)$ も偶数である．つぎに，$n-k=k(m-1)$ が奇数ならば，k も奇数である．よって，$n-k$ が奇数ならば，自動的に $k(n-k)$ も奇数である．ゆえに，前半の結果から，$\ell=k$ の場合に主張が導かれる． ■

上の定理 4.3.4 の中で，k が奇数かつ m が偶数（$n-k$ が奇数）ならば，$\det_{n,k}(1_k^{[m]})=0$ となる部分は，$n-k$ が奇数になるから，系 2.5.3 の結果を用いて，

$$\det_{n,k}(1_k^{[m]})=\det_{n,k+1}((1_k^{[m]},\widetilde{\mathbf{1}}))=0$$

と示すこともできる．

4.3.2 同一行列の積み上げ行列

前項の結果を使って，同一の矩形行列を積み重ねて得られる矩形行列の行列式の値を求めよう．

定理 4.3.5 $1\le k\le \ell\le n$ かつ $n=m\ell$ とする．$\ell\times k$ 行列 Y に対して，つぎのことが成り立つ．

$$\det_{n,k}(Y^{[m]})=\begin{cases} m^{[k/2]}\det_{\ell,k}(Y) & (k(n-k)\text{ が偶数}) \\ m^{(k+1)/2}\det_{\ell,k}(Y) & (k(n-k\text{ が奇数，}\ell\text{ が偶数}) \\ 0 & (k(n-k)\text{ が奇数，}\ell\text{ が奇数}) \end{cases}.$$

ただし，$[k/2]$ は $k/2$ の整数部分である．とくに，Y が k 次正方行列ならば，

$$\det_{n,k}(Y^{[m]})=\begin{cases} m^{[k/2]}\det_{k}(Y) & (k\text{ が偶数または }m\text{ が奇数}) \\ 0 & (k\text{ が奇数かつ }m\text{ が偶数}) \end{cases}.$$

証明 定理 2.6.1 により，任意の $X\in M_{n,\ell}(\mathbb{C})$ と $Y\in M_{\ell,k}(\mathbb{C})$ に対して，右乗法性の一般化

$$\det_{n,k}(XY)=\sum_{d\in\mathscr{C}_k^L}\det_{n,k}(XE_d^L)\det_{k}((E_d^L)^*Y)$$

$$= \sum_{d \in \mathscr{C}_k^L} \mathrm{sgn}_L(d) \det{}_{n,k}(XE_d^L) \det{}_{\ell,k}(P_d^L Y)$$

が成り立つ．ここで，$X = 1_\ell^{[m]}$ とすれば，$1_\ell^{[m]} E_d^L = (E_d^L)^{[m]}$ $(d \in \mathscr{C}_k^L)$ でありしかも $\mathrm{sgn}_L(d) = \mathrm{sgn}_I(d)$ であるから，前の定理 4.3.4 により，行列式 $\det{}_{n,k}(1_\ell^{[m]} Y)$ の値は

$$\sum_{d \in \mathscr{C}_k^L} \mathrm{sgn}_I(d) \det{}_{n,k}((E_d^L)^{[m]}) \det{}_{\ell,k}(P_d^L Y)$$

$$= \begin{cases} m^{[k/2]} \sum_{d \in \mathscr{C}_k^L} \det{}_{\ell,k}(P_d^L Y) & (k(n-k)\text{ が偶数}) \\ m^{(k+1)/2} \sum_{d \in \mathscr{C}_k^L} \det{}_{\ell,k}(P_d^L Y) & (k(n-k)\text{ が奇数，}\ell\text{ が偶数}) \\ 0 & (k(n-k)\text{ が奇数，}\ell\text{ が奇数}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} m^{[k/2]} \det{}_{\ell,k}(Y) & (k(n-k)\text{ が偶数}) \\ m^{(k+1)/2} \det{}_{\ell,k}(Y) & (k(n-k)\text{ が奇数，}\ell\text{ が偶数}) \\ 0 & (k(n-k)\text{ が奇数，}\ell\text{ が奇数}) \end{cases}.$$

とくに，Y が正方行列の場合は，定理 4.3.4 の証明と同じようにしてわかる．

■

$\ell \times k$ 行列 Y を m 個積み重ねた行列 $Y^{[m]}$ の積表示 $Y^{[m]} = 1_\ell^{[m]} Y$ に対しては，前の 2 つの定理より，つぎのことがわかる．

系 4.3.6　$1 \le k \le \ell \le n$ かつ $n = m\ell$ とする．$\ell \times k$ 行列 Y に対して，つぎのことが成り立つ．

(i) $k(n-k)$ と $\ell(n-\ell)$ がともに偶数ならば，

$$\det{}_{n,k}(Y^{[m]}) = m^{[k/2]-[\ell/2]} \det{}_{n,\ell}(1_\ell^{[m]}) \det{}_{\ell,k}(Y).$$

(ii) $k(n-k)$ が偶数で，$\ell(n-\ell)$ が奇数ならば，$\det{}_{n,k}(Y^{[m]})$ は必ずしも 0 ではないが，$\det{}_{n,\ell}(1_\ell^{[m]}) \det{}_{\ell,k}(Y) = 0$ である．

(iii) $k(n-k)$ は奇数で ℓ が偶数ならば，

$$\det{}_{n,k}(Y^{[m]}) = m^{(k+1)/2-[\ell/2]} \det{}_{n,\ell}(1_\ell^{[m]}) \det{}_{\ell,k}(Y).$$

(iv) $k(n-k)$ は奇数で ℓ が奇数ならば,

$$\det{}_{n,k}(Y^{[m]}) = 0 = \det{}_{n,\ell}(1_\ell^{[m]})\det{}_{\ell,k}(Y).$$

系 4.3.7 $Y \in M_k(\mathbb{C})$ かつ $n = mk$ とする．$B \in GL(k, \mathbb{C})$ ならば,

$$\det{}_{n,k}((B^{\oplus m})Y^{[m]}B^{-1}) = \det{}_{n,k}(Y^{[m]}).$$

ただし，$B^{\oplus m}$ は対角上に B を並べた n 次対角行列である．

付録A　複比とプリュッカー関係式

この付録の前半では，射影幾何における各直線上で，物差しの役割を果たす複比が，高次元の場合にも，Cullis 行列式を用いて計算できることを示す．後半では，k 重外積冪 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の余 Cullis 基底を用いて，$\binom{n}{k}-1$ 次元複素射影空間 $\mathrm{Proj}^1(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ に同次座標を導入し，これを用いて，集合（グラスマン多様体[1]）$\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ が，この射影空間において，プリュッカーの関係式を満たす曲面として表せることを示す．

A.1　複比

A.1.1　集合 $\mathbf{Proj}^1(\mathbb{R}^2)$ における複比

2 つの数の比 $a:b$ の値は分数 a/b で与えられる．複比は 2 つの分数の比 $a/b:c/d$ の値として定義される．

定義 A.1.1　2 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，どの対も 1 次独立な 4 つのベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$ に対して定まる値

$$\frac{\det_2((\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3))\det_2((\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_4))}{\det_2((\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_4))\det_2((\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3))} \tag{A.1}$$

を列 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$ の複比といい，$R(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4)$ で表す．

この分数式 (A.1) をよく見ると，行列式の列ベクトルに関する線形性により，各ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$ に 0 でない実数を掛けても，分母と分子で打ち消し合うので，複比の値は変わらない．したがって，複比は各ベクトルの

[1] 付録 B 参照．

張る 4 つの 1 次元部分ベクトル空間（原点を通る直線）の配置だけで決まる数であることがわかる．

そこで，以後，零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ の張る 1 次元部分ベクトル空間 $\mathbb{R}\boldsymbol{x}$ を

$$[\boldsymbol{x}]$$

で表し，点 $[\boldsymbol{x}]$ ともいうことにする．

上の定義式の 4 ベクトルとして，原点を通らない直線 ℓ 上に載っているものを選べば，この中の 2 点 $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j$ を結ぶ線分を底辺とし，原点 O を頂点とする三角形の高さは，原点と直線 ℓ までの距離 h で与えられるので，

$$\det{}_2((\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)) = \pm 2(\text{三角形}\ \triangle \mathrm{O}\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j\text{の面積}) = \pm 2h\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|$$

となる．符号は三角形の頂点 $\mathrm{O}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j$ の並びが反時計回りならなら正，時計回りなら負である．したがって，複比は原点を通らない直線 ℓ 上に並ぶ 4 点間の線分の長さを用いても，

$$\pm\frac{\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3\|\,\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_4\|}{\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_4\|\,\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3\|} \tag{A.2}$$

と求めることができる．

また，定義の仮定により，集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ と $\{\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4\}$ はともに $\mathbb{R}^2$ の基底であるから，2 次正方行列 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ と $(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ はともに正則である．そこで，$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)^{-1}(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ として与えられる 2 次正則行列を $(\lambda_{i,j})$ とすれば，

$$\boldsymbol{x}_3 = \lambda_{1,1}\boldsymbol{x}_1 + \lambda_{2,1}\boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{x}_4 = \lambda_{1,2}\boldsymbol{x}_1 + \lambda_{2,2}\boldsymbol{x}_2$$

と表せるので，

$$\begin{aligned}
\det{}_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3)) &= \lambda_{2,1} \det{}_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)), \\
\det{}_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4)) &= \lambda_{1,2} \det{}_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)), \\
\det{}_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4)) &= \lambda_{2,2} \det{}_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)), \\
\det{}_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)) &= \lambda_{1,1} \det{}_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)).
\end{aligned}$$

この関係式を複比の定義式に代入すると，

$$R(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) = \frac{\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,1}\lambda_{2,2}}$$

とも表せる．

A.1.2 複比の意味

各 $x \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{R}^2$ 上の射影を，

$$p_x = \frac{1}{1+x^2}\begin{pmatrix} x^2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad p_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．p_x は点 $[x\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2]$ への射影であり，p_∞ は点 $[\boldsymbol{e}_1]$ への射影である．したがって，集合 $\mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^2)$ は $\{p_x \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{p_\infty\}$ と表せる．また，行列 p_x の各成分は

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

となるので，$x \to \infty$ とすると，p_x は p_∞ に限りなく近付いて行くことがわかる．ゆえに，単射

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto p_x \in \mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^2)$$

により，$\mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^2)$ は $\mathbb{R}$ に無限遠点 p_∞ をつけたものと解釈することができる．

図 A.1 では 1 次元射影と 1 次元部分ベクトル空間に対して，同じ記号 p_0, p_1, p_x, p_∞ を用いている．原点を通らない直線 ℓ と 4 つの 1 次元部分ベクトル空間 p_0, p_1, p_x, p_∞ との交点をそれぞれ $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_x, \boldsymbol{p}_\infty$ とすれば，

$$\boldsymbol{p}_\infty \in [\boldsymbol{e}_1], \quad \boldsymbol{p}_0 \in [\boldsymbol{e}_2], \quad \boldsymbol{p}_1 \in [\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2], \quad \boldsymbol{p}_x \in [x\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2].$$

前項でも説明したように，複比を求めるときの，原点を通らない直線 ℓ は任意に選べたので，図 A.1 のように，点 $\boldsymbol{e}_2$ を通り，上半平面においてこれら 4 直線と交わり，さらに半直線 $\mathbb{R}_+\boldsymbol{e}_1$ とも交わるものを選ぶことができる．このとき現れる，2 組の相似三角形

$$\triangle \boldsymbol{p}_1 \mathrm{O} \boldsymbol{p}_\infty \sim \triangle \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{p}_0, \quad \triangle \boldsymbol{p}_x \mathrm{O} \boldsymbol{p}_\infty \sim \triangle \boldsymbol{p}_x(\boldsymbol{e}_1 + x\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{p}_0$$

において，対応する辺の長さの比は一定であることを使うと，

$$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_\infty : \mathrm{O}\boldsymbol{p}_\infty = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1 : 1, \quad \boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_\infty : \mathrm{O}\boldsymbol{p}_\infty = \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_x : |x|$$

となる．したがって，$x > 0$ の場合には，三角形 $\triangle \mathrm{O}\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1$ と $\triangle \mathrm{O}\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_x$ が

時計回りで，三角形 $\triangle \mathrm{O}\boldsymbol{p}_\infty\boldsymbol{p}_1$ と $\triangle \mathrm{O}\boldsymbol{p}_\infty\boldsymbol{p}_x$ は反時計回りであるから，列 $\boldsymbol{p}_\infty, \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_x$ の複比は，

$$\frac{\|\boldsymbol{p}_\infty - \boldsymbol{p}_1\|\|\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_x\|}{\|\boldsymbol{p}_\infty - \boldsymbol{p}_x\|\|\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_1\|} = \frac{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_\infty \cdot \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_x}{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_\infty \cdot \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} = |x| = x.$$

$x < 0$ の場合には，三角形 $\triangle \mathrm{O}\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1$ が時計回りで，三角形 $\triangle \mathrm{O}\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_x$ と $\triangle \mathrm{O}\boldsymbol{p}_\infty\boldsymbol{p}_1$ と $\triangle \mathrm{O}\boldsymbol{p}_\infty\boldsymbol{p}_x$ は反時計回りであるから，列 $\boldsymbol{p}_\infty, \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_x$ の複比は，

$$-\frac{\|\boldsymbol{p}_\infty - \boldsymbol{p}_1\|\|\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_x\|}{\|\boldsymbol{p}_\infty - \boldsymbol{p}_x\|\|\boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_1\|} = -\frac{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_\infty \cdot \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_x}{\boldsymbol{p}_x\boldsymbol{p}_\infty \cdot \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_1} = -|x| = x.$$

以上の議論により，複比は集合 $\mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^2)$ において，基準となる 3 点，無限遠点 p_∞，原点 p_0，単位点 p_1 を指定して決まる，点 p_x の座標と考えることができる．上の定義式において，無限遠点，原点，単位点をそれぞれ p_0, p_∞, p_x に選ぶと，複比は点 p_1 の座標と考えられる．このように，4 点のうち基準の 3 点を選ぶ任意性は残されていて，基準の選び方の違いにより複比の値も違ってくることがある．

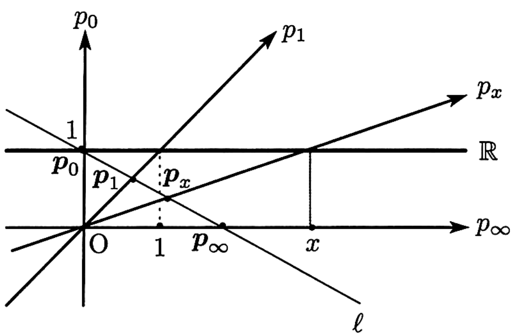


図 A.1　$\mathrm{Proj}(\mathbb{R}^2)$.

ここでの複比の説明では，4 つの 1 次元部分ベクトル空間 p_0, p_1, p_x, p_∞ の選び方に，自然基底を用いたが，それは本質的でなく，4 つの原点を通る直線（1 次元部分ベクトル空間）が，互いに重ならなければ，いつでも成り立つことを示しておこう．そこで，そのような 4 直線を生成するベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{y}_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ とすれば，どの対も 1 次独立である．そこで，複比

$R(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4)$ は正則行列 $(\lambda_{i,j}) = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)^{-1}(\boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4)$ の成分を用いて，$\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}/(\lambda_{1,1}\lambda_{2,2})$ と表せる．この値を x とし，$T = (\lambda_{1,1}\boldsymbol{y}_1, \lambda_{2,1}\boldsymbol{y}_2)$ とすれば，T は正則な 2 次正方行列で，

$$R(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4) = R(T\boldsymbol{e}_1, T\boldsymbol{e}_2, T(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2), T(\boldsymbol{e}_1 + x\boldsymbol{e}_2))$$

となる．他方，正方行列の行列式は乗法性を満たすので，右辺の複比は

$$R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + x\boldsymbol{e}_2) = R(\boldsymbol{p}_\infty, \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_x)$$

となる．

A.1.3 集合 $\mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^3)$ の図形

各 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\mathbb{R}^3$ 上の射影を，

$$p_{(x,y)} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x^2 & xy & 1 \\ xy & y^2 & y \\ x & y & 1 \end{pmatrix},$$

$$q_{(x,y)} = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x^2 & xy & 0 \\ xy & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (x \leq y)$$

で定義すると，$p_{(x,y)}$ は点 $[x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3]$ への射影であり，$q_{(x,y)}$ は点 $[x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2]$ への射影である．したがって，集合 $\mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^3)$ は

$$\{p_{(x,y)} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{q_{(x,y)} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0 \text{ または } y = 0, x > 0\}$$

と表せる．ゆえに，$\mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^3)$ は，単射

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto p_{(x,y)} \in \mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^3)$$

により，$\mathbb{R}^2$ に無限遠直線 $\{q_{(x,y)} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0 \text{ または } y = 0, x > 0\}$ をつけたものと解釈することができる．しかも，この直線は $\mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^2)$ と見なすこともできる．このような見方をすると，系 1.4.4 で与えた Cullis 行列式の新たな幾何学的解釈も得られる．

図 A.2 の左の図は，$\mathbb{R}^2$ の点 (x,y) を $\mathbb{R}^3$ の点 $(x,y,1)$ を通る 1 次元部分ベクトル空間への射影 $p_{(x,y)}$ へ対応させることにより，$\mathbb{R}^2$ を集合 $\mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^3)$ へ埋蔵する様子を表している．右の図は左の図の上下を逆転させ，眼を原点 O の位置に据え，埋蔵された平面 $\mathbb{R}^2$ を見下ろしたときの様子で，上方の左右に延びた直線が遠近法に現れる無限遠直線である．次項で，その辺りの様子をもう少し詳しく説明しよう．

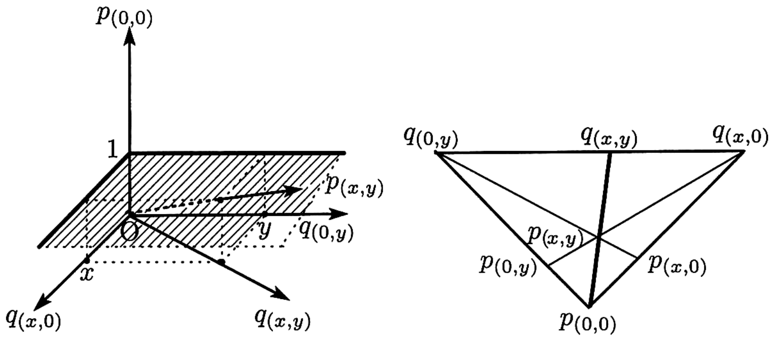


図 A.2　$\mathrm{Proj}(\mathbb{R}^3)$.

A.1.4　射影幾何とは

東京スカイツリーの展望台からの景色を，遠近法を用いてキャンバスに描く様子を想像してみよう．地上の景色を 2 次元平面 π 上の図形と見なすと，π 上の点や直線はそのまま，キャンバス上でも点または直線になるはずである．この状況を説明するために，描いている人の眼の位置を 3 次元ベクトル空間の原点 O とする．π は原点 O を通らない平面である．このとき，原点 O と平面 π 上の点を結ぶ直線は 3 次元ベクトル空間の中の 1 次元部分ベクトル空間であるし，原点 O と π 上の直線により張られる平面は 2 次元部分ベクトル空間である．したがって，キャンバス上の図形は，これら部分ベクトル空間と，キャンバスを含む平面 C との交わりとして捉えられる図形である．このような方法で，ある平面上の図形を別の平面上の図形に移す写像を背景

写像というが，この背景写像を何回繰り返しても保存される図形の性質を調べる幾何学が 2 次元（または平面）射影幾何である．このような背景写像の繰り返しにより得られる平面から平面への写像は射影写像と呼ばれ，複比を保存するだけでなく，逆に，複比を保存する平面から平面への写像は射影写像でもある．

このように，2 次元平面上の点や直線を 3 次元ベクトル空間の 1 次元または 2 次元部分部分ベクトル空間の切り口として捉え直すことにより，角度に関する情報は失われるが，無限遠の点も通常の点と同じように扱うことができ，射影幾何の誕生より古い，パップスの定理，2 次曲線に関するパスカルの定理などが，射影幾何の枠組みの中で統一的に論じられるようになった．このような議論は，2 次元平面における図形だけでなく，一般に $n-1$ 次元ベクトル空間における図形を n 次元ベクトル空間の部分ベクトル空間（あるいは射影）の切り口として捉え直して，もとの図形の性質を研究する幾何学が高次元（または一般）射影幾何である．

このような幾何学の萌芽はルネッサンス期のアルベルティに代表される 14, 5 世紀の遠近法に見られ [20]，ナポレオン遠征に従軍し，ロシア軍の捕虜として拘留された J.V. ポンスレーにより完成させられた．牢獄の窓から差し込む光の影が太陽の動きと共に変化していくときに保存される幾何学的性質が，射影幾何学の対象であることを思うと心が重く感じられる．この射影幾何はユークリッド幾何と同じように公理系をもとに論じられるが，これ以上ここでは立ち入らない．つぎに，平面射影幾何の公理の 1 つを 3 次元ベクトルの問題にしておく．

問題 66（G. デザルグの定理） 平面上の 2 つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において，対応する頂点が重ならず，3 直線 AA', BB', CC' が 1 点で交わるならば，直線 $AB, A'B'$ の交点と直線 $BC, B'C'$ の交点と直線 $CA, C'A'$ の交点からなる 3 点は同一直線上に載っている．

A.2　高次元射影空間での複比

つぎに，この 2 次元ベクトル空間における複比を一般の n 次元実ベクトル空間の場合へ拡張する．

定義 A.2.1　n 次元実ベクトル空間において，$P \in \mathrm{Proj}^2(\mathbb{R}^n)$ におけるファイバー $V'_{n,2}(P)$ の 2 元 X, Y を構成する 4 つの列ベクトルがすべて異なり，しかも対ごとに 1 次独立であるとき，X, Y の**複比**を，$Y = XB$ を満たす $B = (\lambda_{i,j}) \in GL(2, \mathbb{R})$ の行列要素を用いて，

$$R(X, Y) = \frac{\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,1}\lambda_{2,2}}$$

で定義する．

この定義式において，右辺の分母が 0 になることはない．実際，$X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$，$Y = (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ としたときに，$\lambda_{1,1} = 0$ とすると，$\boldsymbol{x}_4 = \lambda_{2,1}\boldsymbol{x}_2$ となるので，4 つのベクトルが対ごとに 1 次独立という仮定と矛盾するし，$\lambda_{2,2} = 0$ としても，同じ矛盾が生じる．また，各列ベクトルに 0 でない実数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を掛け，

$$X' = X \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad Y' = Y \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

としても，$R(X', Y') = R(X, Y)$ となり，複比の値は変わらない．

複比 $R(X, Y)$ の値を r とする．このとき，$X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ に対して，$(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)$ を $\widetilde{X}$ と書くことにすると，

$$R(Y, X) = R(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = R(\widetilde{Y}, \widetilde{X}) = r, \quad R(X, \widetilde{Y}) = r^{-1}$$

などが成り立つ．このように，X, Y の 4 つの列ベクトルを並べ替えると，複比には $1 - r, (r-1)/r, 1/(1-r), r/(r-1)$ などの値が現れる．

つぎに，n 次元実ベクトル空間における複比の計算に Cullis の行列式が利用できることの説明に入る．

補題 A.2.2　$X, Y \in V'_{n,2}(P)$ とする．

(i) $T \in GL(n,\mathbb{R})$ ならば，$TP\mathbb{R}^n$ への射影 P' に対して，$TX, TY \in V'_{n,k}(P')$ かつ $R(TX,TY) = R(X,Y)$.

(ii) $\pi(P)\Gamma({}^tT)\mathbf{1}^{(2)} \neq \mathbf{0}$ を満たす $T \in GL(n,\mathbb{R})$ が存在する（このとき，$\det_{n,2}(TX) \neq 0$）.

証明　(i) $Y = XB$ を満たす 2 次正方行列 B は $TY = TXB$ も満たすので，複比の定義から容易にわかる.

(ii) 2 次元部分ベクトル空間 $P\mathbb{R}^n$ と $n-2$ 次元部分ベクトル空間 $(1-P)\mathbb{R}^n$ の基底をそれぞれ $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, $\{\boldsymbol{b}_3, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ とする．ここで，$T = {}^t(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ とすれば，$T \in GL(n,\mathbb{R})$．2 次外積冪空間において，$\boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{b}_2$ の張る 1 次元部分ベクトル空間への射影を $\pi(P)$ とすれば，

$$\pi(P)\Gamma({}^tT)(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2) = \pi(P)(\boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{b}_1 \wedge \boldsymbol{b}_2 \neq \mathbf{0}$$

となるので，$\pi(P)\Gamma({}^tT)\mathbf{1}^{(2)} \neq \mathbf{0}$ が成り立つ．他方，$\pi_2(X) \neq \mathbf{0}$ かつ $\pi(P)$ は 1 次元射影で，$\pi(P)\pi_2(X) = \pi_2(X)$ を満たしているから，

$$\det{}_{n,2}(TX) = (\Gamma({}^tT)\mathbf{1}^{(2)}|\pi_2(X)) = (\pi(P)\Gamma({}^tT)\mathbf{1}^{(2)}|\pi_2(X)) \neq 0. \quad \blacksquare$$

命題 A.2.3　$X, Y \in V'_{n,2}(P)$ とする．行列 $X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, $Y = (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ の 4 つの列ベクトルの任意の対が 1 次独立であるとする.

(i) $\det_{n,2}(X) \neq 0$ ならば，$\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4)) \neq 0$, $\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)) \neq 0$ かつ

$$R(X,Y) = \frac{\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3))\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4))}{\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4))\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3))}.$$

(ii) $\det_{n,2}(X) = 0$ ならば，補題 A.2.2 の (ii) の T を用いて，

$$R(X,Y) = \frac{\det_{n,2}((T\boldsymbol{x}_1, T\boldsymbol{x}_3))\det_{n,2}((T\boldsymbol{x}_2, T\boldsymbol{x}_4))}{\det_{n,2}((T\boldsymbol{x}_1, T\boldsymbol{x}_4))\det_{n,2}((T\boldsymbol{x}_2, T\boldsymbol{x}_3))}.$$

証明　(i) 4 つの列ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ の任意の対が 1 次独立なときには，$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4)$ も $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ も $V'_{n,2}(P)$ の元である．したがって，$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4) = XC$ を満たす正則な 2 次正方行列 C が存在する．ここでは $\det_{n,2}(X) \neq 0$ を仮定しているから，Cullis 行列式の右乗法性により，$\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4)) =$

$\det_{n,2}(X)\det_2(C) \neq 0$. 同様にして，$\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)) \neq 0$.

つぎに，$Y = XB$ を満たす正則行列 $B = (\lambda_{i,j})$ の行列成分を用いて，ベクトルを具体的に書くと，

$$(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) = (\lambda_{1,1}\boldsymbol{x}_1 + \lambda_{2,1}\boldsymbol{x}_2, \lambda_{1,2}\boldsymbol{x}_1 + \lambda_{2,2}\boldsymbol{x}_2)$$

となるので，A.1.1 項で説明したように，仮定の $\det_{n,2}(X) \neq 0$ を用いると，複比は

$$\frac{\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3))\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4))}{\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4))\det_{n,2}((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3))} = \frac{\lambda_{1,2}\lambda_{2,1}}{\lambda_{1,1}\lambda_{2,2}}$$

となる．

(ii) 補題 A.2.2 の (ii) の T を用いれば，$\det_{n,2}(TX) \neq 0$ となるので，$R(TX, TY)$ が右辺の式で与えられる．したがって，補題 A.2.2 の (i) により，$R(TX, TY)$ を $R(X, Y)$ で置き換えればよい． ■

この命題 A.2.3 により，同一直線上にある 4 ベクトルの複比は，A.1.1 項の場合と同じように，各ベクトルに 0 でない実数を掛けても，その値を変えないから，各ベクトルの張る 4 つの 1 次元部分ベクトル空間の配置を表す数であることがわかる．ただし，$\det_{n,2}(X) = 0$ の場合には，$\det_{n,2}(T_nX) \neq 0$ を満たす正則行列の列 $\{T_n\}$ で単位行列 1 へ収束するものが選べるので，これを用いて議論すればよい．

A.3　プリュッカーの関係式

これまでの議論は実ベクトル空間に限られていたが，ここからは複素ベクトル空間の場合に移る．

n 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ において，1 次元射影全体のなす集合 $\mathrm{Proj}^1(\mathbb{C}^n)$ の点 p の座標を，$p\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たす零でないベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分を用いて，

$${}^t\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

として与える．ただし，任意の零でない複素数 λ 倍した $\lambda\boldsymbol{x}$ も同じ役割を果たすので，点 p の座標は定数倍の違いがあっても同一の点の座標になっている．このような座標を**同次座標**といい，このときの集合 $\mathrm{Proj}^1(\mathbb{C}^n)$ を $n-1$

次元**複素射影空間**という[2]．また，各 k 次元射影 $P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ に対して，$n-1$ 次元複素射影空間の部分集合

$$M_P = \{p \in \mathrm{Proj}^1(\mathbb{C}^n) \mid p \leq P\}$$

を $k-1$ 次元**部分射影空間**といい，その同次座標は $X\mathbb{C}^k = P\mathbb{C}^n$ を満たす $n \times k$ 行列 X の列ベクトルにより与えられる．したがって，X に右側から $B \in GL(k, \mathbb{C})$ を掛ける演算は，この $k-1$ 次元部分射影空間における座標変換を与えている．また，対応

$$P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n) \longmapsto M_P \in \{k-1 \text{ 次元部分射影空間 }\}$$

は全単射であるから，射影空間を論じる際には，これらを同一視して考えることができる．したがって，3 次元以上のベクトル空間における，2 次元射影行列，3 次元射影行列などは，射影空間の議論をするときにはそれぞれ 1 次元部分射影空間，2 次元部分射影空間であり，直線，平面とも呼ばれている．

複素数 $\mathbb{C}$ を実数 $\mathbb{R}$ に置き換えることにより，A.1.4 項でも述べた $n-1$ 次元**実射影空間** $\mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^n)$ を考えることができる．

定理 3.2.11 の主張 (i) で示したように，$X, X' \in V'_{n,k}(P)$ ならば，$\mathbb{C}\pi_k(X) = \mathbb{C}\pi_k(X')$ が成り立つので，そのプリュッカー座標

$$p_{i_1,\ldots,i_k} = (\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} | \pi_k(X)) \quad (i_1, \ldots, i_k) \in I^k$$

は k 重外積冪 $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の 1 次元部分ベクトル空間 $\mathbb{C}\pi_k(X)$ への射影 $\pi(P) \in \mathrm{Proj}^1(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ の同次座標であることがわかる．さらに，単射な写像

$$P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n) \mapsto \pi(P) \in \mathrm{Proj}^1\left(\bigwedge^k \mathbb{C}^n\right) \tag{A.3}$$

を通じて，$P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C})$ の同次座標と見なすこともできる．

まず，プリュッカー座標と余 Cullis 基底の関係を補題にしておく．

補題 A.3.1　行列 $X \in V'_{n,k}(P)$ に対して，k ベクトル $\pi_k(X)$ のプリュッカー座標を $(p_{i_1,\ldots,i_k})_{(i_1,\ldots,i_k)\in I^k}$ とすれば，各 $c \in \mathscr{C}_k^I$ の元を小さい順に並べたものを $j_1, \ldots, j_k$ とすれば，

$$p_{j_1,\ldots,j_k} = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I | \pi_k(X)) = \det{}_k(E_c^* X).$$

[2] 通常 k 次元複素射影空間はここことは違い $P^k(\mathbb{C})$ と表される．

ここで，集合 $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ は $\binom{n}{k}-1$ 次元射影空間 $\mathrm{Proj}^1(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ において（つぎの命題の直後の (A.5) 式で与える）プリュッカーの関係式を満たす曲面[3]として埋蔵されることを示す．

命題 A.3.2　$1<k<n$ かつ X は非退化な $n\times k$ 行列とする．任意の $c\in \mathscr{C}^I_{k-1}$ かつ $d\in \mathscr{C}^I_{k+1}$ に対して，d の元を小さい順に並べたものを $j_1,\dots,j_{k+1}$ とすれば，

$$\sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{\ell-1}\det{}_k((\boldsymbol{e}_{j_\ell},E_c)^*X)\det{}_k(E^*_{d\setminus\{j_\ell\}}X)=0. \tag{A.4}$$

証明　命題 3.3.3 において，$k-1$ ベクトル $\boldsymbol{y}$ として，任意の $c\in\mathscr{C}^I_{k-1}$ に対して決まる $\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c$ を用いて，補題の内容を読み替えればよい．■

このとき，分解可能 k ベクトル $\pi_k(X)\in\bigwedge^k\mathbb{C}^n$ の余 Cullis 基底に関する直交座標を $(x_e)_{e\in\mathscr{C}^I_k}$ とすれば，上の命題は，各 $(c,d)\in\mathscr{C}^I_{k-1}\times\mathscr{C}^I_{k+1}$ に対して，**プリュッカーの関係式**と呼ばれる，連立同次 2 次方程式

$$\sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{\ell-1}(-1)^{m_{j_\ell}-1}x_{c\cup\{j_\ell\}}x_{d\setminus\{j_\ell\}}=0 \tag{A.5}$$

を満たすことを示している．ただし，$j_1,\dots,j_{k+1}$ は d の元を小さい順に並べたものであり，$j\notin c$ のときには，j が $c\cup\{j\}$ の中で小さい順に並べたとき m_j 番目であり，$j\in c$ のときは，$x_{c\cup\{j\}}=0$ としておく．c, d の元を小さい順に並べたものを，それぞれ $i_1,\dots,i_{k-1}$, $j_1,\dots,j_k,j_{k+1}$ とすれば，補題 A.3.1 のプリュッカー座標を用いると，

$$p_{j_1,\dots,j_{\ell-1},j_{k+1},j_{\ell+1},\dots,j_k}=(-1)^{k-\ell}x_{d\setminus\{j_\ell\}}$$

と表せるので，プリュッカーの関係式は，射影幾何で馴染みの式（[6] の 147 頁）

$$\sum_{\ell=1}^{k+1}p_{j_1,\dots,j_{\ell-1},j_{k+1},j_{\ell+1},\dots,j_k}p_{j_\ell,i_1,\dots,i_{k-1}}=0 \tag{A.6}$$

に書き換えられる．ただし，(A.5) は射影空間 $\mathrm{Proj}^1(\bigwedge^k\mathbb{C}^n)$ における同次

---
[3] $k(n-k)$ 次元の滑らかな射影的代数多様体．[6] 参照．

式であるが，(A.6) は (A.5) 式の添え字を交代化して得られる n^k 次元ベクトル空間 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ における同次式である．

この関係式は複数の式からなるが，中には自明なものや，重複するものも現れる．

$n \times k$ 行列 X' が $X'\mathbb{C}^k = X\mathbb{C}^k$ を満たしている場合には，$X' = XB$ を満たす k 次正則行列 B が存在するので，X' により定まるプリュッカーの関係式は，命題 A.3.2 により，X により定まるものと同一である．

例 A.3.3 (i) 行列 $X \in V'_{3,2}(P)$ に対しては，各 $\{i,j\} \in \mathscr{C}_2^I$ に対して，$p_{i,j} = (\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j | \pi_2(X))$ とすれば，部分ベクトル空間 $P\mathbb{C}^3$ の正規ベクトルはこのプリュッカー座標を用いて，

$$J\pi_2(X) = \overline{p_{2,3}}\boldsymbol{e}_1 + \overline{p_{3,1}}\boldsymbol{e}_2 + \overline{p_{1,2}}\boldsymbol{e}_3$$

と表せる．別の行列 $Y = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) \in V'_{3,2}(P)$ に対しては $Y = XB$ を満たす 2 次正則行列 B が存在するので，$J\pi_2(Y) = \det{}_2(B) J\pi_2(X)$ となる．

(ii) 行列 $X \in V'_{4,2}(P)$ に対しては，$\pi_2(X)$ の余 Cullis 基底に関する座標を，$x_{\{i,j\}} = (\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{\{i,j\}} | \pi_2(X))$ $(i < j)$ とすると，その座標

$$(x_{\{1,2\}}, x_{\{1,3\}}, x_{\{1,4\}}, x_{\{2,3\}}, x_{\{2,4\}}, x_{\{3,4\}}) \in \mathbb{C}^6$$

はプリュッカーの関係式

$$x_{\{1,2\}}x_{\{3,4\}} - x_{\{1,3\}}x_{\{2,4\}} + x_{\{1,4\}}x_{\{2,3\}} = 0 \tag{A.7}$$

を満たしている．このとき，各 $\mathscr{C}_1^I \times \mathscr{C}_3^I$ の各元に対して決まる 16 個の関係式のうち，$(\{i\}, I \setminus \{i\})$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ 以外の 12 個の式はすべて意味のない式になり，残りの 4 式はどれも同一の式を表すことがわかるので，連立同次 2 次式は，ただ 1 つの同次 2 次方程式 (A.7) にまとめられる（問題 57 参照）．議論を実射影空間に制限すると，この式は 5 次元実射影空間 $\mathrm{Proj}^1(\bigwedge^2 \mathbb{R}^4)$ における 2 次曲面を表している．さらに，定理 3.2.11 の (ii) により，3 次元実射影空間 $\mathrm{Proj}^1(\mathbb{R}^4)$ における直線 $P \in \mathrm{Proj}^2(\mathbb{R}^4)$ は，この 2 次曲面上の点と対応している．

つぎの定理で述べるように，上の命題 A.3.2 は逆も成り立つことが知られ

ているので，この例 A.3.3 の最後に述べた単射対応は，実は全単射である．

定理 A.3.4 射影空間 $\mathrm{Proj}^1(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ における同次座標 $(x_e)_{e\in\mathscr{C}_k^I}$ がプリュッカーの関係式 (A.5) を満たせば，

$$\det{}_k(E_e^* X) = x_e \quad (e \in \mathscr{C}_k^I)$$

を満たす $n \times k$ 行列 X が存在する．

証明 プリュッカーの関係式を満たす同次座標 $(x_e)_{e\in\mathscr{C}_k^I}$ を用いて得られる k ベクトルを $\boldsymbol{x} = \sum_{e\in\mathscr{C}_k^I} x_e \widetilde{\boldsymbol{e}}_e^I$ とする．任意の $n-k-1$ ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して，

$$(J\boldsymbol{x}) \wedge J(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つことが示せれば，定理 3.2.12 により，k ベクトル $\boldsymbol{x}$ は分解可能である．したがって，$\pi_k(X) = \boldsymbol{x}$ を満たす $n \times k$ 行列 X が存在し，

$$\det{}_k(E_e^* X) = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_e^I | \pi_k(X)) = (\widetilde{\boldsymbol{e}}_e^I | \boldsymbol{x}) = x_e \tag{A.8}$$

となる．

任意の $n-k-1$ ベクトル $\boldsymbol{y}$ は余 Cullis 基底 $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus d}^I \mid d \in \mathscr{C}_{k+1}^I\}$ の 1 次結合で表せるから，外積の多重線形性により，$\boldsymbol{y} = \widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus d}^I$ の場合に上の等式を示せばよい．この場合には，$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \sum_{e\in\mathscr{C}_k^I} x_e \widetilde{\boldsymbol{e}}_e^I \wedge \widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus d}^I$ となる．右辺のベクトル $\widetilde{\boldsymbol{e}}_e^I \wedge \widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus d}^I$ が零ベクトルにならないための必要十分条件は $e \subset d$ であるから，e としては，d の元を小さい順に並べた $j_1, \ldots, j_{k+1}$ を用いて得られる $k+1$ 個の元 $d \setminus \{j_\ell\}$ $(j = 1, \ldots, k+1)$ だけを考えればよい．ゆえに，

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \sum_{e\in\mathscr{C}_k^I} x_e \widetilde{\boldsymbol{e}}_e^I \wedge \widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus d}^I = \sum_{\ell=1}^{k+1} x_{d\setminus\{j_\ell\}} \widetilde{\boldsymbol{e}}_{d\setminus\{j_\ell\}}^I \wedge \widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus d}^I$$

と表せる．$I \setminus d$ の元を小さい順に並べたとき，j_{k+1} より小さい $I \setminus d$ の元は $j_{k+1} - (k+1)$ 個ある．添え字 $\alpha \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ の大きい方から小さい方に向かって同様な議論を繰り返すことができ，各 α について，j_α より小さい $I \setminus d$ の元は $j_\alpha - \alpha$ 個ある．したがって，外積の交代性を使うと，

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_{d\setminus\{j_\ell\}}^I \wedge \widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus d}^I = (-1)^{\sum_{\alpha\neq\ell}(j_\alpha-\alpha)} \widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus\{j_\ell\}}^I = (-1)^{j_\ell-\ell}\mathrm{sgn}_I(d) \widetilde{\boldsymbol{e}}_{I\setminus\{j_\ell\}}^I$$

となる．ゆえに，

$$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=\mathrm{sgn}_I(d)\sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{j_\ell-\ell}x_{d\setminus\{j_\ell\}}\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus\{j_\ell\}}.$$

また，$J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{I\setminus\{j_\ell\}}=(-1)^{n-1}\boldsymbol{e}^I_{\{j_\ell\}}=(-1)^{n-1}(-1)^{j_\ell-1}\boldsymbol{e}_{j_\ell}$ であるから，

$$J(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})=\mathrm{sgn}_I(d)\sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{n+\ell}\overline{x_{d\setminus\{j_\ell\}}}\boldsymbol{e}_{j_\ell}.$$

他方，$J\boldsymbol{x}=\sum_{e\in\mathscr{C}^I_k}\overline{x_e}J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_e=\sum_{e\in\mathscr{C}^I_k}\overline{x_e}(-1)^{k(n-k)}\boldsymbol{e}^I_{I\setminus e}$ であるから，$n-k+1$ ベクトル $(J\boldsymbol{x})\wedge J(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})$ は

$$\mathrm{sgn}_I(d)\sum_{e\in\mathscr{C}^I_k}\sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{n+\ell+k(n-k)}\overline{x_e}\,\overline{x_{d\setminus\{j_\ell\}}}\boldsymbol{e}^I_{I\setminus e}\wedge\boldsymbol{e}_{j_\ell}$$

となる．そこで，このベクトルの規格直交基底 $\{J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c\mid c\in\mathscr{C}^I_{k-1}\}$ に関する展開係数がすべて 0 になることを示せば，これが零ベクトルであることがわかる．

$$\begin{aligned}&(J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c|(J\boldsymbol{x})\wedge J(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}))\\=&\mathrm{sgn}_I(d)\sum_{e\in\mathscr{C}^I_k}\sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{n+\ell+k(n-k)}\overline{x_e}\,\overline{x_{d\setminus\{j_\ell\}}}(J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c|\boldsymbol{e}^I_{I\setminus e}\wedge\boldsymbol{e}_{j_\ell})\\=&\mathrm{sgn}_I(d)\sum_{e\in\mathscr{C}^I_k}\sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{n+\ell+kn}\overline{x_e}\,\overline{x_{d\setminus\{j_\ell\}}}(a(\boldsymbol{e}_{j_\ell})^*J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c|\boldsymbol{e}^I_{I\setminus e}).\end{aligned}$$

ここで，問題 56 の公式を使うと，$J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c$ は $n-k+1$ ベクトルであるから，

$$\begin{aligned}&a(\boldsymbol{e}_{j_\ell})^*J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c\\=&(-1)^{(k+1)n+1}Ja(\boldsymbol{e}_{j_\ell})\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_c\\=&(-1)^{(k+1)n+1}(-1)^{m_{j_\ell}-1}J\widetilde{\boldsymbol{e}}^I_{c\cup\{j_\ell\}}\\=&\begin{cases}(-1)^{(k+1)n+1}(-1)^{m_{j_\ell}-1}(-1)^{k(n-k)}\boldsymbol{e}^I_{I\setminus(c\cup\{j_\ell\})} & (j_\ell\notin c)\\ \boldsymbol{0} & (j_\ell\in c)\end{cases}.\end{aligned}$$

他方，$j_\ell\in c$ の場合には，$x_{c\cup\{j_\ell\}}=0$ と仮定されていたことに注意すれば，

プリュッカーの関係式 (A.5) により,

$$
\begin{aligned}
&(J\widetilde{\boldsymbol{e}}_c^I|(J\boldsymbol{x})\wedge J(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}))\\
=&(-1)^{k(n-k)}\mathrm{sgn}_I(d)\sum_{e\in\mathscr{C}_k^I}\sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{\ell+m_{j_\ell}}\overline{x_e}\,\overline{x_{d\setminus\{j_\ell\}}}(\boldsymbol{e}^I_{I\setminus(c\cup\{j_\ell\})}|\boldsymbol{e}^I_{I\setminus e})\\
=&(-1)^{k(n-k)}\mathrm{sgn}_I(d)\sum_{\ell=1}^{k+1}(-1)^{\ell+m_{j_\ell}}\overline{x_{c\cup\{j_\ell\}}}\,\overline{x_{d\setminus\{j_\ell\}}}=0
\end{aligned}
$$

となる.　■

付録 B　グラスマン多様体上の主ファイバー束

ここでは，3.4 節の補足として，Cullis 行列式を微分幾何の基本的な概念である「主ファイバー束」という視点から見直してみると，そこで説明したファイバー $V'_{n,k}(P)$（または，$V_{n,k}(P)$）は，グラスマン多様体 $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ を底空間とし，一般線形群 $GL(n,\mathbb{C})$（または，ユニタリ群 $U(k)$）を構造群とする，主ファイバー束として知られるスティーフェル多様体 $V'_{n,k}(\mathbb{C})$（または，$V_{n,k}(\mathbb{C})$）のファイバーとして実現される．このとき，このグラスマン多様体上には，局所的微分可能な断面に選ぶことができるので，このような断面の 1 つを固定することにより，Cullis 行列式 $\det_{n,k}$ は，グラスマン多様体 $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ 上で，$U(k)$ を構造群とする主ファイバー束 $V_{n,k}(\mathbb{C})$ から，$U(1)$ を構造群とする直線束への準同型を導くことがわかる．現時点では，このような議論を通して，Cullis 行列式に関する新たな知見が得られているわけではないが，1 つの大局的な見方として紹介しておく．

B.1　スティーフェル多様体とグラスマン多様体

非退化な $n \times k$ 行列 X の列ベクトルのなす集合は，部分ベクトル空間 $X\mathbb{C}^k$ における基底であるから，その部分ベクトル空間において k 次元座標系を定める k 枠（座標軸）と見なすことができるので，$V'_{n,k}(\mathbb{C})$ をその部分ベクトル空間における k 枠全体のなす集合と同一視する．いま，k 枠 $X \in V'_{n,k}(\mathbb{C})$ を 1 つ固定し，それを不動にしている正則行列の全体を

$$H_X = \{T \in GL(n,\mathbb{C}) \mid TX = X\}$$

とすれば，これは一般線形群 $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群であり，全単射

$$TH_X \in GL(n,\mathbb{C})/H_X \longmapsto TX \in V'_{n,k}(\mathbb{C}) \quad (T \in GL(n,\mathbb{C}))$$

を通じて，$V'_{n,k}(\mathbb{C})$ には**複素スティーフェル多様体**と呼ばれる多様体の構造が，$GL(n,\mathbb{C})$ の多様体構造から導かれる[1]．とくに，$n\times k$ 等長行列の列ベクトルのなす集合は**規格直交 k 枠**と見なすことができるので，$V_{n,k}(\mathbb{C})$ をこのような規格直交 k 枠全体のなす集合族と同一視する．この場合にも，上と同様な議論が，一般線形群の代わりにユニタリ群 $U(n)$ を用いてなされ，$V_{n,k}(\mathbb{C})$ は，上と同じ，複素スティーフェル多様体という名前で呼ばれているが，前後の文脈からこれら 2 つを取り違える心配はない．

各 $P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ に対して，(3.29) 式で与えられた一般線形群 $GL(n,\mathbb{C})$ の部分群 H_P は

$$H_P = \{T \in GL(n,\mathbb{C}) \mid TP = PTP\}$$

とも表せる．このとき，全単射

$$TH_P \in GL(n,\mathbb{C})/H_P \longmapsto (TP\mathbb{C}^n\text{への射影}) \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$$

を通じて，$\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ 上には**複素グラスマン多様体**と呼ばれる多様体の構造が，$GL(n,\mathbb{C})$ の多様体構造から導かれる[2]．

一般線形群の代わりにユニタリ群 $U(n)$ を用いても，H_P の代わりに，部分群

$$H_P \cap U(n) = \{U \in U(n) \mid UP = PU\}$$

を使えば，同じように $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ 上に複素グラスマン多様体の構造を導くことができる[3]．このとき，一般線形群（またはユニタリ群）からスティーフェル多様体またはグラスマン多様体への（射影と呼ばれている）自然な全射写像をそれぞれ，

$$p_S : GL(n,\mathbb{C}) \longrightarrow V'_{n,k}(\mathbb{C}), \quad p_S : U(n) \longrightarrow V_{n,k}(\mathbb{C}),$$
$$p_G : GL(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}), \quad p_G : U(n) \longrightarrow \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C})$$

[1] 群 G とその部分群 H が与えられたとき，$t \in G$ に対して集合 $\{ts \mid s \in H\}$ を H に関する**左剰余類**といい，tH で表す．このとき G の部分集合族 $\{tH \mid t \in G\}$ を G/H で表す．

[2] 複素グラスマン多様体はここと違って $G_{n,k}(\mathbb{C})$ と表されることが多い．

[3] $SU(n)$ の場合には，部分群 $\{U \in SU(n) \mid UP = PU, \det_k(U_P)\det_{n-k}(U_{1-P}) = 1\}$ を使う．ただし，U_P, U_{1-P} はそれぞれ U の $P\mathbb{C}^n, (1-P)\mathbb{C}^n$ への制限である．

とすると，これらはともに（リー群 $GL(n,\mathbb{C})$ の商写像と見なせるので，これらの写像による単位元 1_n の像のある開近傍に局所断面が存在し）主ファイバー束になる．つぎの命題の証明の中でこの事実を利用するので，例えば，[8] の第 1 章の第 5 節 “Fibre bundles” を参照していただきたい．

以上の準備の下に，本論に入る．まず，スティーフェル多様体 $V'_{n,k}(\mathbb{C})$ の元 X に対して，k 枠 X を不動にする正則行列全体のなす集合 H_X は，$P = p_S(X)$ により決まる H_P の部分群であるから，自然な全射 $GL(n,\mathbb{C})/H_X \to GL(n,\mathbb{C})/H_P$ が存在する．これを読み替えることにより，スティーフェル多様体からグラスマン多様体への自然な全射

$$p : X' \in V'_{n,k}(\mathbb{C}) \longmapsto (X'\mathbb{C}^k\text{への射影}) \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C})$$

が存在する．同様に，スティーフェル多様体 $V_{n,k}(P)$ の場合にも，全射

$$p : X' \in V_{n,k}(\mathbb{C}) \longmapsto (X'\mathbb{C}^k\text{への射影}) \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C})$$

が存在する．まず，これらが，主ファイバー束の構造をもつことを説明するが，式の記述が見やすいように，以後，上の議論の X と P をそれぞれ，E_K と $P_K = E_K E_K^*$ という特別な場合に選ぶが，一般性は損なわれない．この場合には，$T \in GL(n,\mathbb{C})$，$U \in U(n)$ に対して，

$$p_S(T) = TE_K, \quad p_S(U) = UE_K,$$
$$p_G(T) = (TP_K\mathbb{C}^n\text{への射影}), \quad p_G(U) = UP_KU^*$$

となっている．

命題 B.1.1 (i) $n \times k$ 等長行列の全体 $V_{n,k}(\mathbb{C})$ は，複素グラスマン多様体 $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ を底空間とし，$U(k)$ を構造群にもつ主ファイバー束である．

(ii) 非退化な $n\times k$ 行列の全体 $V'_{n,k}(\mathbb{C})$ は，複素グラスマン多様体 $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ を底空間とし，$GL(k,\mathbb{C})$ を構造群にもつ主ファイバー束である．

証明 まず，証明に先立ち，つぎの 2 つの図式

$$\begin{array}{ccc} GL(n,\mathbb{C}) & \xrightarrow{p_S} & V'_{n,k}(\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle p_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n) & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U(n) & \xrightarrow{p_S} & V_{n,k}(\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle p_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n) & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

はともに可換であることに注意しておこう．つまり，$p \circ p_S = \mathrm{id} \circ p_G$ が成り立っている．

ここでは，(i) だけを示すが，(ii) も同じように論じることができる．スティーフェル多様体 $V_{n,k}(\mathbb{C})$ には $U(k)$ の元 B が右から $v \mapsto vB$ のように作用しているが，v は非退化であるから，$vB = vB'$ ならば，$B = B'$ が成り立つ．（つまり，この作用は自由である.）また，写像

$$p : v \in V_{n,k}(\mathbb{C}) \longmapsto vv^* \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C})$$

は $p(v) = p(vB)$ を満たし，全射かつ微分可能でもある．したがって，$V_{n,k}(\mathbb{C})$ が主ファイバー束であることを示すには，各点 $P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C})$ において，（局所自明近傍と呼ばれる）ある近傍 $\mathscr{U}$ が存在することを示す必要がある．つまり，$\mathscr{U}$ に対して，写像 $\phi_{\mathscr{U}} : p^{-1}(\mathscr{U}) \to U(k)$ で，つぎの 2 条件を満たすものが存在することを示せばよい．

(i) 任意の $v \in p^{-1}(\mathscr{U})$，$B \in U(k)$ に対して，$\phi_{\mathscr{U}}(vB) = \phi_{\mathscr{U}}(v)B$.

(ii) 写像 $v \in p^{-1}(\mathscr{U}) \mapsto (p(v), \phi_{\mathscr{U}}(v)) \in \mathscr{U} \times U(k)$ は微分同相である．

以後，(ii) の写像を局所自明写像といい，$\psi_{\mathscr{U}}$ で表すことにする．

さて，([7] の第 1 章の例 5.1 で説明されているように，リー群 G から閉部分群 H により定まる商空間 G/H への自然な写像 $t \mapsto tH$ は，商空間を底空間とし，H を構造群とする主ファイバー束になるので）ユニタリ群 $U(n)$ はグラスマン多様体 $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ を底空間にもち，$U(k) \oplus U(n-k)$ を構造群にもつ主ファイバー束である．したがって，$U(n)$ から $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ への微分可能な全射 p_G で，

$$p_G(uT) = p_G(u) \quad (u \in U(n),\ T \in U(k) \oplus U(n-k))$$

を満たすものが存在する．さらに，各点 $P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C})$ において，ある局所自

明な近傍 $\mathscr{U}$ と $\phi'_{\mathscr{U}}(uT) = \phi'_{\mathscr{U}}(u)T$ $(u \in p_G^{-1}(\mathscr{U}),\ T \in U(k) \oplus U(n-k))$ を満たす写像 $\phi'_{\mathscr{U}} : p_G^{-1}(\mathscr{U}) \to U(k) \oplus U(n-k)$ で，局所自明写像

$$\psi'_{\mathscr{U}} : u \in p_G^{-1}(\mathscr{U}) \longmapsto (p_G(u), \phi'_{\mathscr{U}}(u)) \in \mathscr{U} \times (U(k) \oplus U(n-k))$$

が微分同相になっているものが存在する．

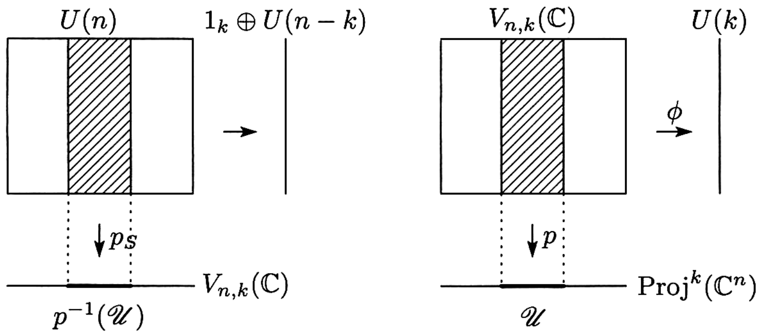


図 **B.1** ファイバー $V_{n,k}(P)$ の解釈．

つぎに，上で述べた主ファイバー束 $U(n) \to \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ の性質を用いて，微分可能な全単射 $p : V_{n,k}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ に局所断面，つまり $p(\sigma_{\mathscr{U}}(P)) = P$ $(P \in \mathscr{U})$ を満たす写像 $\sigma_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \to V_{n,k}(\mathbb{C})$ が存在することを示す．

各点 $P \in \mathscr{U}$ において，$p_G(u) = p_G(u') = P$ ならば，$u' = uT$ $(T \in U(k) \oplus U(n-k)$ と表せるので，$u\phi'_{\mathscr{U}}(u)^{-1} = u'\phi'_{\mathscr{U}}(u')^{-1}$．したがって，$p_G(u) = P$ を満たす u に対して，写像

$$\sigma'_{\mathscr{U}} : P \in \mathscr{U} \longmapsto u\phi'_{\mathscr{U}}(u)^{-1} \in U(n)$$

は u の選び方によらず，$P \in \mathscr{U}$ だけで決まるので，$\sigma'_{\mathscr{U}}$ は $p_G(\sigma'_{\mathscr{U}}(P)) = P$ $(P \in \mathscr{U})$ を満たす局所断面である．つぎに，局所断面 $\sigma'_{\mathscr{U}}$ の微分可能性を考える．そこで，$U(k) \oplus U(n-k)$ の元 T を 1 つ固定して得られる埋蔵写像

$$\iota : P \in \mathscr{U} \longmapsto (P, T) \in \mathscr{U} \times (U(k) \oplus U(n-k))$$

に，上の微分同相な写像 $\psi'_{\mathscr{U}}$ の逆写像を合成して得られる写像 $(\psi'_{\mathscr{U}})^{-1} \circ \iota$:

$\mathscr{U} \to p_G^{-1}(\mathscr{U})$ は微分可能である．このとき，この写像による $P \in \mathscr{U}$ の像は $(P, T) = (p_G(u), \phi'_{\mathscr{U}}(u))$ を満たす $u \in p_G^{-1}(\mathscr{U})$ として一意的に決まる．また，写像 $u \in \mathscr{U} \mapsto u\phi'_{\mathscr{U}}(u)^{-1} \in U(n)$ は，$\phi'_{\mathscr{U}}$ の微分可能性により，微分可能である．ゆえに，これら 2 つを合成して得られる局所断面 $\sigma'_{\mathscr{U}}$ は微分可能である．ここで，

$$\sigma_{\mathscr{U}} = p_S \circ \sigma'_{\mathscr{U}}$$

とする．p_S の微分可能性により，$\sigma_{\mathscr{U}}$ も微分可能である．このとき，

$$p(\sigma_{\mathscr{U}}(P)) = p(p_S(u\phi'_{\mathscr{U}}(u)^{-1})) = p_G(u\phi'_{\mathscr{U}}(u)^{-1}) = P$$

となるので，写像 $\sigma_{\mathscr{U}}$ は，全射 $p : V_{n,k}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ に関する，微分可能な局所断面である．これを用いて，

$$\phi_{\mathscr{U}} : v \in p^{-1}(\mathscr{U}) \longmapsto \sigma_{\mathscr{U}}(p(v))^* v \in U(k)$$

とすれば，この写像は微分可能で，$\phi_{\mathscr{U}}(vB) = \phi_{\mathscr{U}}(v)B \ (B \in U(k))$ を満たしている．しかも，写像

$$\psi_{\mathscr{U}} : v \in p^{-1}(\mathscr{U}) \longrightarrow (p(v), \phi_{\mathscr{U}}(v)) \in \mathscr{U} \times U(k)$$

は微分同相である．ゆえに，$p : V_{n,k}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ は $U(k)$ を構造群にもつ主ファイバー束である． ■

B.2　スティーフェル多様体と Cullis 行列式

命題 B.1.1 により，3.4.1 項で述べた集合 $V'_{n,k}(P)$ および $V_{n,k}(P)$ は，それぞれ主ファイバー束 $V'_{n,k}(\mathbb{C})$, $V_{n,k}(\mathbb{C})$ の底空間の点 $P \in \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ におけるファイバー $p^{-1}(P)$ であることがわかる．とくに，$V_{n,k}(P)$ の場合には，各ファイバーに属する行列の行列式の値はどれも絶対値 1 の複素数の違いしかないが，局所自明近傍上では微分可能な断面を選ぶことができるので，その行列式の値も微分可能で，局所自明な近傍どうしの空でない共通部分上では，つぎに説明する変換関数により互いに結ばれることを示そう．

複素スティーフェル多様体を用いて，複素グラスマン多様体を主ファイバー束と見なすときに使われる，グラスマン多様体の開被覆を $\{\mathscr{U}_\alpha\}$ とする．こ

のとき，$\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ において，

$$\psi_{\beta,\alpha}(P) = \phi_{\mathscr{U}_\beta}(v)(\phi_{\mathscr{U}_\alpha}(v))^{-1} \quad (P \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta,\ v \in p^{-1}(P))$$

で与えられる，$U(k)$ に値をとる関数 $\psi_{\beta,\alpha}$ を**変換関数**といい，つぎの定理の中で利用される．

定理 B.2.1 命題 B.1.1 の主ファイバー束 $p : V_{n,k}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ をそのまま用いることにする．そのとき，グラスマン多様体 $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ のある開被覆 $\{\mathscr{U}_\alpha\}$ の元 $\mathscr{U}_\alpha$ に対して，

(i) 微分可能な局所断面 $\sigma_\alpha : \mathscr{U}_\alpha \to p^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ で

$$\sigma_\beta(P) = \sigma_\alpha(P)\psi_{\alpha,\beta}(P) \quad (P \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta)$$

を満たすものが存在する．

(ii) 各 $P \in \mathscr{U}_\alpha$ に対して，$c_\alpha(P) = \det{}_{n,k}(\sigma_\alpha(P))$ とすると，任意の $X \in V'_{n,k}(P)$ に対して，

$$\det{}_{n,k}(X) = c_\alpha(P) \det{}_k(\phi_{\mathscr{U}_\alpha}(X)),$$
$$c_\beta(P) = \det{}_k(\psi_{\alpha,\beta}(P))c_\alpha(P) \quad (P \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta)$$

が成り立つ．

証明 (i) 命題 B.1.1 において，微分可能な局所断面 σ_α を用いて，写像 $\phi_\alpha : p^{-1}(\mathscr{U}_\alpha) \to U(k)$ を $\phi_\alpha(V) = \sigma_\alpha(P)^*V$ $(P = p(V) \in \mathscr{U}_\alpha)$ で定義したから，$P \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ において，

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha,\beta}(P) &= \phi_\alpha(V)\phi_\beta(V)^* = \sigma_\alpha(P)^*V(\sigma_\beta(P)^*V)^* \\ &= \sigma_\alpha(P)^*VV^*\sigma_\beta(P) = \sigma_\alpha(P)^*P\sigma_\beta(P) = \sigma_\alpha(P)^*\sigma_\beta(P).\end{aligned}$$

したがって，

$$\sigma_\beta(P) = \sigma_\alpha(P)\sigma_\alpha(P)^*\sigma_\beta(P) = \sigma_\alpha(P)\psi_{\alpha,\beta}(P).$$

(ii) 任意の $V \in p^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ に対して，$\phi_\alpha(V) = \sigma_\alpha(P)^*V$ であったから，

$V = \sigma_\alpha(P)\phi_\alpha(V)$ となる．ここで，$c_\alpha(P) = \det_{n,k}(\sigma_\alpha(P))$ とすれば，矩形行列の行列式の右乗法性により，

$$\det_{n,k}(V) = c_\alpha(P)\det_k(\phi_\alpha(V))$$

が成り立つ．

つぎに，$X \in V'_{n,k}(P)$ の極分解を $V|X|$ とすれば，$V \in p^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ かつ $|X| \in GL(k,\mathbb{C})$ である．(i) の証明で使われた写像 ϕ_α を (ii) の場合にも，同じように使うと，

$$\begin{aligned}\det_{n,k}(X) &= \det_{n,k}(V)\det_k(|X|) = c_\alpha(P)\det_k(\phi_\alpha(V))\det_k(|X|)\\ &= c_\alpha(P)\det_k(\phi_\alpha(V)|X|) = c_\alpha(P)\det_k(\phi_\alpha(V|X|))\\ &= c_\alpha(P)\det_k(\phi_\alpha(X)).\end{aligned}$$

また，$P \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ に対して，

$$\begin{aligned}c_\beta(P) &= \det_{n,k}(\sigma_\beta(P)) = \det_{n,k}(\sigma_\alpha(P)\psi_{\alpha,\beta}(P))\\ &= \det_{n,k}(\sigma_\alpha(P))\det_k(\psi_{\alpha,\beta}(P)) = c_\alpha(P)\det_k(\psi_{\alpha,\beta}(P))\end{aligned}$$

となる． ■

この定理により，Cullis 行列式 $\det_{n,k}$ が，グラスマン多様体 $\mathrm{Proj}^k(\mathbb{C}^n)$ 上で，$U(k)$ を構造群とする主ファイバー束 $V_{n,k}(\mathbb{C})$ から，$U(1)$ を構造群とする直線束への準同型を導いていることがわかる．

付録 C　回転群上の不変積分

ここでは，4.2 節において使われる n 次回転群 $SO(n)$ 上の不変積分の構成の仕方を説明する．被積分関数は，いちいち断らないが，連続なものを考えている．

単位円周を区間 $[0, 2\pi)$ と読み替えると，関数 f の積分は，回転に関する不変性

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta+\theta')\,d\theta$$

を満たしている．ただし，$\theta+\theta'$ は 2π を周期として考えている．この積分は全単射

$$\theta \in [0, 2\pi) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$$

を通じて 2 次回転群 $SO(2)$ 上での積に関する規格不変積分

$$\int_{SO(2)} f(U)\,d\nu(U) = \int_{SO(2)} f(U'U)\,d\nu(U)$$

と解釈することができる．ここでは，$SO(2)$ 上の不変積分をもとに 4.2 節で説明したようにして 3 次回転群 $SO(3)$ 上の規格不変積分を定義し，この $SO(3)$ 上の不変積分をもとに 4 次回転群 $SO(4)$ 上の規格不変積分を定義するといった手順を帰納的に繰り返し，最終的に n 次回転群 $SO(n)$ 上の積分で，任意の $U' \in SO(n)$ に対して，不変性

$$\int_{SO(n)} f(U)\,d\nu(U) = \int_{SO(n)} f(U'U)\,d\nu(U)$$

を満たす規格積分を求めることにする．この種の議論に不慣れな場合には，議論の進め方だけを見ておいていただきたい．

C.1　曲面上の積分

k 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ における領域 D から $\mathbb{R}^n$ への微分可能な写像

$$\boldsymbol{x} : (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in D \longmapsto \boldsymbol{x}(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbb{R}^n$$

の像として定まる集合を，n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ における微分可能な**曲面**という．とくに，各点における接空間の次元が k のときには，k 次元曲面という．

ここで，$\boldsymbol{x}(\theta_1, \ldots, \theta_k) = \sum_{i=1}^n x_i(\theta_1, \ldots, \theta_k)\boldsymbol{e}_i$ と展開すると，各成分 x_i の全微分は

$$dx_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} d\theta_j \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と表せる．このとき，ベクトル

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} \boldsymbol{e}_i \quad (j = 1, \ldots, k)$$

は曲面上の点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ においてその曲面に接する θ_j 方向への接ベクトルになる．これを短く $\boldsymbol{x}_j$ で表し，それを並べて得られる $n \times k$ 行列 $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ を X とする．この k 個のベクトルの張る平行多面体の体積 $\det_k(|X|)$ は，D における微小面積 $d\theta_1 \cdots d\theta_k$ が写像 $\boldsymbol{x}$ により曲面上の微小面積に移されたときの，拡大比（伸縮率）を与えている．したがって，この曲面上に関数 f が与えられると，この関数は写像 $\boldsymbol{x}$ を通して D 上の関数 $f \circ \boldsymbol{x}$ と同一視することができるので，曲面上の積分は

$$\int \cdots \int_D f(\boldsymbol{x}(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})) \det{}_k(|X|)\, d\theta_1 \cdots d\theta_k$$

により与えられる．

C.2 球面上の積分

平面上の座標としてよく使われている直交座標と極座標を高次元の場合にも考えてみよう．グラム–シュミットの直交化との類似にも注意して欲しい．これからの議論では多重積分を用いるが，どれも有界区間の直積集合上の有界連続関数の積分であるから，フビニの定理により，積分の順序を入れ替えることができる．詳細は積分論の教科書を参照していただきたい．

まず，直交座標 $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ と極座標 $(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1}) \in \mathbb{R}_+ \times [0,\pi]^{n-2} \times [0,2\pi)$ との関係は

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1,\\
x_k &= r\Bigl(\prod_{j=1}^{k-1}\sin\theta_j\Bigr)\cos\theta_k \quad (k=2,3,\dots,n-1),\\
x_n &= r\prod_{j=1}^{n-1}\sin\theta_j
\end{aligned}
$$

により与えられる．

註 11　極座標で $r=0$ の場合には，θ_j $(j=1,\dots,n-1)$ がどんな値であっても，直交座標の原点が対応している．また，直交座標のある点に対応する極座標が，ある θ_j $(j=1,\dots,n-2)$ で 0 または π の場合には，残りの θ_k $(k\neq j)$ の値は必ずしも一意的には定まらない．このように，極座標から直交座標への対応は全射ではあるが，単射ではない．しかし，極座標 $(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})$ を $(\mathbb{R}_+\setminus\{0\})\times(0,\pi)^{n-2}\times[0,2\pi)$ に制限すれば単射になる．したがって，これらを変数とする積分などでは，この点に注意すれば，直交座標に関する（有界な連続関数の）積分を極座標に関する積分に書き換えることができる．

ここで，$x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ であることと，$r=1$ となることは同値であるから，$\mathbb{R}^n$ における $n-1$ 次元単位球面 S^{n-1} は，

$$\boldsymbol{x}(\theta_1,\dots,\theta_{n-1}) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \vdots \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

とおいて得られる微分可能な写像

$$(\theta_1,\dots,\theta_{n-1}) \in [0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi) \longmapsto \boldsymbol{x}(\theta_1,\dots,\theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

の像として与えられる．以後，この $n-1$ 次元単位球面を表す極座標を**球面座標**といい，その集合を，

$$C_{n-1} = [0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi)$$

とおいて表す．

ここで，単位球面上の点 $\boldsymbol{x}$ における θ_j 方向への接ベクトルを $\boldsymbol{x}_j$ とし，これを順に並べて得られる $n\times(n-1)$ 行列 $(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n-1})$ を X とし，その添え字集合 $I\setminus\{n\}$ を K とする．伸縮率は，補題 3.1.10 により，

$$\begin{aligned}\|\pi_{n-1}(X)\| &= \sqrt{(\pi_{n-1}(X)|\pi_{n-1}(X))} = \sqrt{(\Gamma(X)\boldsymbol{e}_K^K|\Gamma(X)\boldsymbol{e}_K^K)} \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{e}_K^K|\Gamma({}^tXX)\boldsymbol{e}_K^K)} = \sqrt{\det{}_{n-1}({}^tXX)}\end{aligned}$$

により与えられる．そこで，行列式 $\det{}_{n-1}({}^tXX)$ の値を求めるために，n 次正方行列 $(\boldsymbol{x},X)$ を Y とする．$\|\boldsymbol{x}\|^2=1$ であるから，$(\boldsymbol{x}_j|\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_j)=0$ となるので，$(\boldsymbol{x}_j|\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_j)=0$．このことを使うと，

$$\det{}_n({}^tYY) = \det{}_n\left(\begin{pmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & {}^tXX \end{pmatrix}\right) = \det{}_{n-1}({}^tXX)$$

となる．ただし，$\boldsymbol{0}$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ の零ベクトルである．

補題 C.2.1　上の行列 Y を，次数と回転角を付けて $Y_n(\theta_1,\dots,\theta_{n-1})$ と表すことにすると，

$$\det{}_n(Y_n) = \prod_{j=1}^{n-1}\sin^{n-j-1}\theta_j.$$

証明 次数nに関する帰納法を用いる．$n=2$の場合には，$\boldsymbol{x}(\theta)=\cos\theta\,\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\,\boldsymbol{e}_2$であるから，${}^t\boldsymbol{x}\;\boldsymbol{x}=1$となり，

$$\det{}_2(Y_2(\theta))=1.$$

つぎに，$n-1$のとき

$$\det{}_{n-1}(Y_{n-1})=\prod_{j=1}^{n-2}\sin^{n-j-2}\theta_j$$

が成り立つことを仮定して，nの場合にも同様な式が成り立つことを示す．そこで，(C.1) 式のベクトルを$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i$とすると，$Y_n=Y_n(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$の行列式は

$$\begin{vmatrix}
x_1 & x_1\frac{-\sin\theta_1}{\cos\theta_1} & 0 & \cdots & 0\\
x_2 & x_2\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} & x_2\frac{-\sin\theta_2}{\cos\theta_2} & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
x_{n-1} & x_{n-1}\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} & x_{n-1}\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2} & \cdots & x_{n-1}\frac{-\sin\theta_{n-1}}{\cos\theta_{n-1}}\\
x_n & x_n\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} & x_n\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2} & \cdots & x_n\frac{\cos\theta_{n-1}}{\sin\theta_{n-1}}
\end{vmatrix}$$

となる．ただし，この行列式の成分に現れる分数は，各x_jの因数のうち，分母の因数は消去して分子を因数として挿入するという意味の略記法で，従来の意味の分数ではないが，分母がすべて 0 でない場合には通常の行列式と一致している．これを第n列について展開することを考えよう．このn次行列式の左上の$n-1$次正方部分行列は$n-1$次正方行列Y_{n-1}の第$n-1$行だけが$\cos\theta_{n-1}$倍になっていて，残りの部分は全く同じである．また，このn次行列式の第n列の第$n-1$，第n成分は，それぞれ$-x_n$，x_{n-1}となっており，第$n-1$行を$\sin\theta_{n-1}/\cos\theta_{n-1}$倍すると，$(n,n)$成分以外は第$n$行と一致しているので，この第$n$列に関する展開は

$$\begin{aligned}
&-(-x_n)\sin\,\theta_{n-1}\det{}_{n-1}(Y_{n-1})+x_{n-1}\cos\theta_{n-1}\det{}_{n-1}(Y_{n-1})\\
&=\det{}_{n-1}(Y_{n-1}(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}))\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin^2\theta_{n-1}\\
&\quad+\det{}_{n-1}(Y_{n-1}(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}))\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos^2\theta_{n-1}\\
&=\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\det{}_{n-1}(Y_{n-1}(\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}))
\end{aligned}$$

となる．ここで帰納法の $n-1$ の場合の仮定を使うと，

$$\det{}_n(Y_n) = \sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\prod_{j=1}^{n-2}\sin^{n-j-2}\theta_j = \prod_{j=1}^{n-1}\sin^{n-j-1}\theta_j$$

となり，n の場合が示せた． ■

したがって，

$$\det{}_n({}^tYY) = \det{}_n({}^tY)\det{}_n(Y) = \det{}_n(Y)^2 = \Bigl(\prod_{j=1}^{n-1}\sin^{n-j-1}\theta_j\Bigr)^2.$$

ゆえに，$n-1$ 次元単位球面 S^{n-1} 上の関数 f の積分は，C.1 節の議論により，

$$\int\cdots\int_{C_{n-1}} f(\boldsymbol{x}(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}))\Bigl(\prod_{j=1}^{n-1}\sin^{n-j-1}\theta_j\,d\theta_j\Bigr) \qquad \text{(C.2)}$$

で与えられる．この積分は極座標を使って記述されてはいるが，元々は直交座標で記述された $\mathbb{R}^n$ またはその部分空間における通常の積分を極座標に変数変換しただけであるから，$n-1$ 次元単位球面 S^{n-1} の面積要素

$$\prod_{j=1}^{n-1}\sin^{n-j-1}\theta_j\,d\theta_j \qquad \text{(C.3)}$$

は $\mathbb{R}^n$ における原点を中心とした座標の回転に関して不変である．このことは，直接の計算で確かめることもできる．実際，単位球面 S^{n-1} 上の点 $\boldsymbol{x}(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$ に $U'\in SO(n)$ を作用させると，

$$\frac{\partial U'\boldsymbol{x}}{\partial\theta_j} = U'\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\theta_j} \quad (j=1,2,\ldots,n-1)$$

となるので，$\boldsymbol{x}_j = \partial\boldsymbol{x}/\partial\theta_j$ とおいて，$X=(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{n-1})$ とすると，

$$\|\pi_{n-1}(UX)\| = \sqrt{\det{}_{n-1}({}^t(UX)UX)} = \sqrt{\det{}_{n-1}({}^tXX)}.$$

よって，補題 C.2.1 により，面積要素 (C.3) は原点を中心とする回転では変わらない．

以後，この単位球面上の積分 (C.2) を

$$\int_{C_{n-1}} f(\boldsymbol{x}(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}))\,d\mu_{n-1}(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})$$

と略記する．この μ_{n-1} を用いる略記法は，Y の次数が n の代わりに，$\ell = 2, \ldots, n-1$ に対しても用いることにする．このとき，関数 f が恒等的に 1 の値をとるときの積分値は，ℓ 次元単位球面 S^ℓ $(\ell = 1, \ldots, n-1)$ の面積を与えるので，その値を $\mu(S^\ell)$ とし，上の積分をこの値で割って規格化すると，

$$\frac{1}{\mu(S^\ell)} \int_{C_\ell} f(\boldsymbol{x}(\theta_1, \ldots, \theta_\ell))\, d\mu_\ell(\theta_1, \ldots, \theta_\ell)$$

は $\mathbb{R}^{\ell+1}$ の原点を中心とする回転に関して不変な ℓ 次元単位球面 S^ℓ 上の規格積分になる．この係数の球面積の具体的数値の計算に関しては C.6 節で改めて論じる．

C.3 オイラー角

オイラーによって導入された 3 次元回転群 $SO(3)$ の元のパラメータ表示を，高次元の回転群 $SO(n)$ の場合にまで拡張する．そのために，$SO(n)$ の元をオイラー角と呼ばれる $(n-1)n/2$ 個のパラメータで表示する方法を考える．

以下の議論では，定義 4.2.1 で与えた直交行列 $U_{i,i+1}(\theta)$ を用いる．

$U \in SO(n)$ とする．補題 4.2.2 を用いて，つぎのような回転を繰り返す．

$$U\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{U_{n-1,n}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{U_{n-2,n-1}} \cdots \xrightarrow{U_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

まず補題 4.2.2 の (i) を使って，$U_{n-1,n}(-\theta_{n-1,n-1})U\boldsymbol{e}_1$ の n 番目の成分が 0, $n-1$ 番目の成分 x'_{n-1} が非負の値となるような $\theta_{n-1,n-1} \in [0, 2\pi)$ を選ぶ．つぎに，$n-1$ 番目の成分 x'_{n-1} が非負であるから，補題 4.2.2 の (ii) を使って，

$$U_{n-2,n-1}(-\theta_{n-1,n-2})U_{n-1,n}(-\theta_{n-1,n-1})U\boldsymbol{e}_1$$

の $n-1$ 番目の成分が 0, $n-2$ 番目の成分が非負の値となるような $\theta_{n-1,n-2} \in$

$[0,\pi]$ を選ぶことができる．以下，同様な議論を繰り返すと，上の縦ベクトルが変化していく図式からわかるように，

$$U^{(n-1)} = U_{n-1,n}(\theta_{n-1,n-1})U_{n-2,n-1}(\theta_{n-1,n-2})\cdots U_{1,2}(\theta_{n-1,1})$$

とすると，この行列は

$$ {}^tU^{(n-1)}U\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$$

を満たす直交行列である．とくに，回転角を明記したいときには，これらの角を

$$\Theta_{n-1} = (\theta_{n-1,n-1}, \theta_{n-1,n-2}, \ldots, \theta_{n-1,1}) \in [0,2\pi) \times [0,\pi]^{n-2}$$

とまとめて，$U^{(n-1)}(\Theta_{n-1})$ と書くことにする．

また，直交行列 ${}^tU^{(n-1)}U$ は $\boldsymbol{e}_1$ を不動にしていたので，$SO(n)$ の右下のコーナーへ

$$V \in SO(n-1) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \in SO(n)$$

のように埋蔵された，$SO(n-1)$ と同型な部分群

$$H_{n-1} = 1 \oplus SO(n-1) \subset SO(n)$$

の元である．したがって，$H_{n-1}\boldsymbol{e}_2 \in (\mathbb{R}\boldsymbol{e}_1)^{\perp}$．

つぎに，$U\boldsymbol{e}_1$ の代わりに，${}^tU^{(n-1)}(\Theta_{n-1})U\boldsymbol{e}_2 \in (\mathbb{R}\boldsymbol{e}_1)^{\perp}$ に対して上と同じ議論を繰り返す．$SO(n)$ の代わりに，この $SO(n-1)$ と同型な部分群 H_{n-1} を使うと，

$$ {}^tU^{(n-2)}(\Theta_{n-2})\, {}^tU^{(n-1)}(\Theta_{n-1})U\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2$$

を満たす，次式で与えられる直交行列 $U^{(n-2)}(\Theta_{n-2})$ が存在する．

$$U_{n-2,n-1}(\theta_{n-2,n-2})U_{n-3,n-2}(\theta_{n-2,n-3})\cdots U_{1,2}(\theta_{n-2,1}).$$

ただし，

$$\Theta_{n-2} = (\theta_{n-2,n-2}, \theta_{n-2,n-3}, \cdots, \theta_{n-2,1}) \in [0,2\pi) \times [0,\pi]^{n-3}$$

である．他方，${}^tU^{(n-2)}(\Theta_{n-2})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$ であるから，

$$ {}^tU^{(n-2)}(\Theta_{n-2})\, {}^tU^{(n-1)}(\Theta_{n-1})U\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_k \quad (k=1,2).$$

ゆえに，この直交行列 ${}^tU^{(n-2)}(\Theta_{n-2})\,{}^tU^{(n-1)}(\Theta_{n-1})U$ は H_{n-1} の右下のコーナーへ埋蔵された，$SO(n-2)$ と同型な部分群

$$H_{n-2} = 1_2 \oplus SO(n-2) \subset H_{n-1}$$

の元である．したがって，$H_{n-2}\boldsymbol{e}_3 \in (\mathbb{R}\boldsymbol{e}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{e}_2)^{\perp}$．以下，同じ議論を繰り返して，

$${}^tU^{(1)} \cdots {}^tU^{(n-2)}\,{}^tU^{(n-1)}U\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

を満たす直交行列 $U^{(1)} = U^{(1)}(\Theta_1), \ldots, U^{(n-1)} = U^{(n-1)}(\Theta_{n-1})$ が存在する．この式は，

$$U\boldsymbol{e}_k = U^{(n-1)} \cdots U^{(2)}U^{(1)}\boldsymbol{e}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

と書き直せる．ここで，2 つの直交行列 U および $U^{(n-1)} \cdots U^{(2)}U^{(1)}$ のベクトル $\boldsymbol{e}_n$ への作用に関しては，符号の違いが考えられるが，ここで用いた直交行列はすべて $SO(n)$ の元であるから，それらの行列式の値は 1 であり，符号は正になる．実際，${}^tU^{(1)} \cdots {}^tU^{(n-2)}\,{}^tU^{(n-1)}U$ を V とすれば，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{n-1} \wedge V\boldsymbol{e}_n &= V\boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge V\boldsymbol{e}_n = \Gamma(V)(\boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n) \\ &= \det{}_n(V)\,\boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n\end{aligned}$$

となるので，V は $\mathbb{R}^n$ 上の恒等変換である．よって，

$$U = U^{(n-1)}(\Theta_{n-1}) \cdots U^{(2)}(\Theta_2)U^{(1)}(\Theta_1). \tag{C.4}$$

このとき，集合

$$D_\ell = [0, 2\pi) \times [0, \pi]^{\ell-1} \quad (\ell = 1, \ldots, n-1)$$

を用いて得られる，直積集合

$$D_{n-1} \times \cdots \times D_2 \times D_1$$

の元である $(n-1)n/2$ 個の回転角 $(\Theta_{n-1}, \ldots, \Theta_2, \Theta_1)$ を直交行列 $U \in SO(n)$ の**オイラー角**という．以上を要約するとつぎの定理が得られる．

定理 C.3.1 上で説明したオイラー角を用いて得られる写像

$$
\begin{aligned}
&(\Theta_{n-1},\dots,\Theta_2,\Theta_1)\in D_{n-1}\times\cdots\times D_2\times D_1\\
&\longmapsto U^{(n-1)}(\Theta_{n-1})\cdots U^{(2)}(\Theta_2)U^{(1)}(\Theta_1)\in SO(n)
\end{aligned}
$$

は全射である．さらに，$D_\ell^\circ=[0,2\pi)\times(0,\pi)^{\ell-1}$ とすると，この写像は

$$
D_{n-1}^\circ\times\cdots\times D_2^\circ\times D_1
$$

上では単射である．

証明 上では最初の写像の全射性を示したが，2 番目の写像の単射性は命題 4.2.3 と同じようにしてわかる． ■

C.4 オイラー角と球面座標

オイラー角と球面座標の関係を示す．前節でも説明したように，各 $\ell=2,\dots,n-1$ に対して

$$
H_\ell=\{U\in SO(\ell+1)\mid U\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1\}
$$

とすれば，H_ℓ は $SO(\ell)$ と同型な $SO(\ell+1)$ の部分群で，$SO(\ell+1)$ の右下のコーナーへ

$$
V\in SO(\ell)\longmapsto 1\oplus V\in H_\ell\quad(\subset SO(\ell+1))
$$

のように埋蔵されている．

補題 C.4.1 $\ell+1$ 次回転群 $SO(\ell+1)$ の商空間 $SO(\ell+1)/H_\ell$ と ℓ 次元単位球面 $S^\ell=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{\ell+1}\mid\|\boldsymbol{x}\|=1\}$ は，全単射

$$
UH_\ell\in SO(\ell+1)/H_\ell\longmapsto U\boldsymbol{e}_1\in S^\ell
$$

を通じて同一視することができる．このとき，

$$
U=U_{\ell,\ell+1}(\theta_\ell)\cdots U_{2,3}(\theta_2)U_{1,2}(\theta_1)
$$

に対応する球面 S^ℓ 上の点 $U\boldsymbol{e}_1$ の球面座標は $(\theta_1,\dots,\theta_\ell)\in C_\ell$ により与えられる．

証明 球面上の点 $U\boldsymbol{e}_1$ は

$$
\begin{aligned}
&U_{\ell,\ell+1}(\theta_\ell)\cdots U_{2,3}(\theta_2)U_{1,2}(\theta_1)\boldsymbol{e}_1\\
=&U_{\ell,\ell+1}(\theta_\ell)\cdots U_{2,3}(\theta_2)(\cos\theta_1\boldsymbol{e}_1+\sin\theta_1\boldsymbol{e}_2)\\
=&U_{\ell,\ell+1}(\theta_\ell)\cdots U_{3,4}(\theta_3)(\sin\theta_1 U_{2,3}(\theta_2)\boldsymbol{e}_2)+\cos\theta_1\boldsymbol{e}_1\\
=&U_{\ell,\ell+1}(\theta_\ell)\cdots U_{3,4}(\theta_3)(\sin\theta_1(\cos\theta_2\boldsymbol{e}_2+\sin\theta_2\boldsymbol{e}_3))\\
&\ +\cos\theta_1\boldsymbol{e}_1\\
=&U_{\ell,\ell+1}(\theta_\ell)\cdots U_{3,4}(\theta_3)(\sin\theta_1\sin\theta_2\boldsymbol{e}_3)\\
&\ +\sin\theta_1\cos\theta_2\boldsymbol{e}_2+\cos\theta_1\boldsymbol{e}_1\\
&\vdots\\
&=\cos\theta_1\boldsymbol{e}_1+\sum_{k=2}^{\ell}\left(\prod_{j=1}^{k-1}\sin\theta_j\right)\cos\theta_k\boldsymbol{e}_k+\left(\prod_{j=1}^{\ell}\sin\theta_j\right)\boldsymbol{e}_{\ell+1}
\end{aligned}
$$

となるので，C.2 節の議論からわかるように，ℓ 次元単位球面 S^ℓ 上の点 $U\boldsymbol{e}_1$ の球面座標は，$(\theta_1,\ldots,\theta_\ell)\in C_\ell$ である． ■

この補題 C.4.1 により，成分の順番を逆に並べ替えて得られる全単射

$$(\theta_1,\ldots,\theta_\ell)\in C_\ell\longmapsto(\theta_\ell,\ldots,\theta_1)\in D_\ell$$

を用いると，球面座標をオイラー角として選ぶことができる．以後，オイラー角の成分を逆順に並べ替えて得られる球面座標を，オイラー角 Θ の上にバーを付けて $\overline{\Theta}$ で表す．その結果，C.3 節の定理 C.3.1 はつぎのように読み替えることができる．

定理 C.4.2 n 次回転群 $SO(n)$ の元は，球面座標の直積集合 $C_{n-1}\times\cdots\times C_2\times C_1$ を用いて，次のように記述される．写像

$$
\begin{aligned}
&(\overline{\Theta}_{n-1},\ldots,\overline{\Theta}_2,\overline{\Theta}_1)\in C_{n-1}\times\cdots\times C_2\times C_1\\
&\longmapsto U^{(n-1)}(\Theta_{n-1})\cdots U^{(2)}(\Theta_2)U^{(1)}(\Theta_1)\in SO(n)
\end{aligned}
$$

は全射である．さらに，$C_\ell^\circ=(0,\pi)^{\ell-1}\times[0,2\pi)$ とすると，この写像は

$$C_{n-1}^\circ\times\cdots\times C_2^\circ\times C_1$$

上では単射である.

C.5　$SO(n)$ 上の不変積分

回転群 $SO(3)$ から 2 次元単位球面 S^2 への全射

$$U \in SO(3) \longmapsto U\boldsymbol{e}_1 \in S^2$$

を考えると，集合 $H_2 = \{U \in SO(3) \mid U\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1\}$ は回転群 $SO(2)$ と同型な $SO(3)$ の部分群であり，これから導かれる自然な写像 $SO(3)/H_2 \mapsto S^2$ は全単射である．これを

$$0 \longrightarrow SO(2) \longrightarrow SO(3) \longrightarrow S^2 \longrightarrow 0$$

と表し，完全系列という．4.2 節では，単位円 $S^1(\cong SO(2))$ 上の原点を中心とする回転不変な規格積分と，単位球面 S^2 上の原点を中心とする回転不変な規格積分を用いて，回転群 $SO(3)$ 上の規格不変積分を構成する方法を示した.

C.2 節において，すでに ℓ 次元単位球面 S^ℓ 上の原点を中心とする回転不変な規格積分の存在は示してあるので，回転群 $SO(\ell)$ 上の規格不変積分が存在すれば，上と同じようにして，全射

$$U \in SO(\ell+1) \longmapsto U\boldsymbol{e}_1 \in S^\ell$$

から導かれる完全系列

$$0 \longrightarrow SO(\ell) \longrightarrow SO(\ell+1) \longrightarrow S^\ell \longrightarrow 0$$

を用いて，回転群 $SO(\ell+1)$ 上の規格不変積分の存在を示すことにする．すでに，$\ell = 2$ の場合の証明は済んでいるので，これを出発点に ℓ の値が小さい方から大きい方に向かって帰納的に議論を進めて行けば，一般の n 次回転群 $SO(n)$ 上にも規格不変積分が存在することを示すことができる.

定理 C.5.1　回転群 $SO(n)$ 上には規格不変積分が存在し，関数 f の積分はオイラー角 Θ_m $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ を用いて

$$\frac{1}{\prod_{m=1}^{n-1}\mu(S^m)}\int_{\prod_{m=1}^{n-1}C_m} f(U^{(n-1)}(\Theta_{n-1})\cdots U^{(1)}(\Theta_1))\prod_{m=1}^{n-1}d\mu_m(\overline{\Theta}_m) \tag{C.5}$$

と表せる.

証明 すでに 4.2 節においても，この付録の冒頭でも説明したように，平面の回転群 $SO(2)(\cong H_2)$ 上には規格不変積分が存在する．この事実を出発点として，回転群の次数に関して帰納的に，n 次元の回転群 $SO(n)$ 上にも規格不変積分が存在することを証明する.

つぎに，帰納法の第 2 段階の議論として，$SO(\ell)$ 上では，(C.5) 式の n を ℓ に書き換えた式が $SO(\ell)$ 上の規格不変積分を与えているものと仮定して，$SO(\ell+1)$ 上にも規格不変積分が存在することを示す．いま，この $SO(\ell)$ 上の規格不変積分を

$$\int_{SO(\ell)} f(U)\,d\nu(U)$$

で表すことにする．定理 C.3.1 により，$SO(\ell+1)$ の元 U はオイラー角を用いて

$$U^{(\ell)}(\Theta_\ell)U^{(\ell-1)}(\Theta_{\ell-1})\cdots U^{(1)}(\Theta_1)$$

と表せる．これは $SO(\ell)$ と同型な部分群 $H'_\ell=\{U'\in SO(\ell+1)\mid U'\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1\}$ の元 $U'={}^tU^{(\ell)}(\Theta_\ell)U=U^{(\ell-1)}(\Theta_{\ell-1})\cdots U^{(1)}(\Theta_1)$ を用いて，$U^{(\ell)}(\Theta_\ell)U'$ と表せる．つぎに，$SO(\ell+1)$ 上の連続関数 f に対して，上の規格不変積分を用いて

$$f^*(U^{(\ell)}(\Theta_\ell))=\int_{SO(\ell)} f(U^{(\ell)}(\Theta_\ell)U')\,d\nu(U')$$

とする．ただし，右辺の最初の U' は H'_ℓ の元であるが，後の U' は $SO(\ell)$ の元と同一視したものである．このとき得られた関数 f^* は任意の $U'\in H'_\ell$ と $U\in SO(\ell+1)$ に対して，$f^*(UU')=f^*(U)$ を満たしているので，ℓ 次元単位球面

$$SO(\ell+1)/H'_\ell\cong S^\ell=\{U\boldsymbol{e}_1\in\mathbb{R}^{\ell+1}\mid U\in SO(\ell+1)\}$$

上の関数と見なすことができる．他方，C.2 節で説明した単位球面 S^ℓ 上の規

格積分は，$\mathbb{R}^{\ell+1}$ における回転 $U'' \in SO(\ell+1) : U\boldsymbol{e}_1 \mapsto U''U\boldsymbol{e}_1$ に関して不変であるから，この積分を使って関数 f^* を積分すると，$SO(\ell+1)$ 上の規格不変積分が得られる．帰納法の仮定である (C.5) 式で n を ℓ に置き換えた式を用いて，積分を具体的に求めると

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(S^\ell)}\int_{C_\ell} f^*(U^{(\ell)}(\theta_\ell,\ldots,\theta_1))\,d\mu_\ell(\theta_1,\ldots,\theta_\ell)\\
=&\frac{1}{\mu(S^\ell)}\int_{C_\ell}\int_{SO(\ell)} f(U^{(\ell)}(\Theta_\ell)U)\,d\nu(U)\,d\mu_\ell(\overline{\Theta}_\ell)\\
=&\frac{1}{\prod_{m=1}^{\ell}\mu(S^m)}\int_{\prod_{m=1}^{\ell}C_m} f(U^{(\ell)}(\Theta_\ell)\cdots U^{(1)}(\Theta_1))\prod_{m=1}^{\ell}d\mu_m(\overline{\Theta}_m)
\end{aligned}
$$

と表せる．これにより，$SO(\ell+1)$ 上の規格不変積分が (C.5) 式の n を $\ell+1$ の置き換えた式により与えられることがわかる．よって，帰納法により，一般の $SO(n)$ 上にも規格左不変積分が存在し，その積分は (C.5) 式により与えられることが示された．■

本書の議論には，高次元の単位球面積の値を具体的に知る必要はないが，議論を完全なものにするために，次節ではこのような単位球面の面積を計算して規格化定数を具体的に求めることにしよう．

上で得られた n 次回転群 $SO(n)$ 上の規格不変積分を

$$\int_{SO(n)} f(U)\,d\nu(U)$$

と略記する．

C.6　不変積分の規格化

まず，$SO(n)$ 上の不変積分を求める過程で，ℓ 次元球面 S^ℓ 上の積分を，$\ell = 1, 2, \ldots, n-1$ と繰り返してきた．したがって，$SO(n)$ 上の不変積分の規格化には，これらの球面の面積 $\mu(S^\ell)$ を計算する必要がある．その途中に使われる三角関数の積分計算をつぎの問題にしておこう．

問題 67　つぎの式を任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して証明せよ．

(i) $\displaystyle\int_0^\pi \cos\theta \sin^{j-1}\theta\, d\theta = 0.$

(ii) $$\int_0^\pi \sin^j\theta\, d\theta = \begin{cases} \pi\dfrac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(j-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot j} & (j：偶数) \\ 2\dfrac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(j-1)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot j} & (j：奇数) \end{cases}.$$

つぎの関数

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \quad (a > 0)$$

は古くから**ガンマ関数**として知られている．明らかに，$\Gamma(1) = 1$ である．部分積分を使うと，$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ が成り立つ．また，a が $1/2$ の場合には，$y = \sqrt{x}$ と変数変換すると，

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$$

となるので，Γ 関数のこれらの性質を使うと，問題 67 の (ii) の右辺は一括して

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma((j+1)/2)}{\Gamma((j+2)/2)}$$

と表せる．したがって，ℓ 次元単位球面の面積 $\mu(S^\ell)$ は

$$\int_{C_\ell}\prod_{j=1}^{\ell}\sin^{j-1}\theta_j\,d\theta_j = 2\pi\prod_{j=2}^{\ell}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(j/2)}{\Gamma((j+1)/2)} = \frac{2\pi^{(\ell+1)/2}}{\Gamma((\ell+1)/2)}$$

となる．そこで，この値を用いて回転群 $SO(n)$ 上での不変積分を規格化すると，つぎの定理が得られる．

定理 C.6.1　回転群 $SO(n)$ 上の（連続）関数 f に対する規格不変積分

$$\int_{SO(n)} f(U)\,d\nu(U)$$

はオイラー角 $\Theta_1,\ldots,\Theta_{n-1}$ を用いた積分

$$\frac{1}{\prod_{\ell=1}^{n-1}\mu(S^\ell)}\int_{\prod_{\ell=1}^{n-1}C_\ell} f(U(\Theta_{n-1},\ldots,\Theta_1))\prod_{\ell=1}^{n-1}d\mu_\ell(\overline{\Theta}_\ell) \tag{C.6}$$

により与えられる．ただし，

$$\mu(S^\ell) = \frac{2\pi^{(\ell+1)/2}}{\Gamma((\ell+1)/2)} \quad (\ell = 1, 2, \ldots, n-1)$$

かつ

$$U(\Theta_{n-1}, \ldots, \Theta_1) = U^{(n-1)}(\Theta_{n-1}) \cdots U^{(1)}(\Theta_1)$$

である.

付録D　解答例

第1章

問題 1　$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を結ぶ直線上に載っているための必要十分条件は $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ の定数倍になることであるから，これは $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ となる実数 λ が存在することと同値である．したがって，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ とも同値である．

問題 2

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}) \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2+2(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})+\|\boldsymbol{b}\|^2 \le \|\boldsymbol{a}\|^2+2\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|+\|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &= (\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2.\end{aligned}$$

問題 3　$\|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2\pm2(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})+\|\boldsymbol{b}\|^2$ である．したがって，$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2=4(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})$．

問題 4　$\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x})=0$ は原点を通る直線を与える．したがって，$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0$ はこの直線を $\boldsymbol{a}$ だけ平行移動したものになっている．$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}$ と表せるので，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}$ の和に直交分解される．$\boldsymbol{a}$ 自身も直線上の点であるから，$\|\boldsymbol{a}\|$ が原点から直線までの距離である．

問題 5　$\|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2=4\|\boldsymbol{a}\|^2-4(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})+\|\boldsymbol{b}\|^2=3$ となる．同様に，$\|2\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2=3$．よって，$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\|\le\|\boldsymbol{a}-(1/2)\boldsymbol{b}\|+\|(1/2)\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\|=\sqrt{3}$．両辺を 2 乗すると，$-2(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{c})\le 1$．よって，$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{c})\ge -1/2$．

問題 6　$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^n x_j\boldsymbol{e}_j$ とすれば，ベクトル $A\boldsymbol{x}$ の第 i 成分は $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$ となるので，シュワルツの不等式を使うと，

$$\begin{aligned}\|A\boldsymbol{x}\|^2 &= \sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\Big)^2 \le \sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2\sum_{j=1}^n x_j^2\Big) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2\|\boldsymbol{x}\|^2.\end{aligned}$$

問題 7　$A=(a_{i,j})$, $B=(b_{i,j})$, $C=(c_{i,j})$ とする．

結合法則：A は $n\times k$ 行列，B は $k\times\ell$ 行列，C は $\ell\times m$ 行列とする．AB の (i,j) 成分は $\sum_{\alpha=1}^k a_{i,\alpha}b_{\alpha,j}$ であるから，$(AB)C$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{\beta=1}^{\ell}\Bigl(\sum_{\alpha=1}^{k}a_{i,\alpha}b_{\alpha,\beta}\Bigr)c_{\beta,j}$$

で与えられる．

BC の (i,j) 成分は $\sum_{\beta=1}^{\ell}b_{i,\beta}c_{\beta,j}$ であるから，$A(BC)$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{\alpha=1}^{k}a_{i,\alpha}\Bigl(\sum_{\beta=1}^{\ell}b_{\alpha,\beta}c_{\beta,j}\Bigr)$$

である．したがって，$(AB)C$ と $A(BC)$ の (i,j) 成分は同じ値になり，結合法則が成り立っている．

分配法則：A は $n\times k$ 行列，B,C は $k\times\ell$ 行列とする．$B+C$ の (i,j) 成分は $b_{i,j}+c_{i,j}$ であるから，$A(B+C)$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{\alpha=1}^{k}a_{i,\alpha}(b_{\alpha,j}+c_{\alpha,j})=\sum_{\alpha=1}^{k}a_{i,\alpha}b_{\alpha,j}+\sum_{\alpha=1}^{k}a_{i,\alpha}c_{\alpha,j}.$$

AB の (i,j) 成分は $\sum_{\alpha=1}^{k}a_{i,\alpha}b_{\alpha,j}$ であり，AC の (i,j) 成分は $\sum_{\alpha=1}^{k}a_{i,\alpha}c_{\alpha,j}$ であるから，$AB+AC$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{\alpha=1}^{k}(a_{i,\alpha}b_{\alpha,j}+a_{i,\alpha}c_{\alpha,j})$$

となり，分配法則が成り立つ．

もう 1 つの分配法則 $(A+B)C=AC+BC$ も同様にして示される．

結合法則：A は $n\times k$ 行列，B は $k\times\ell$ 行列とする．$(cA)B$, $A(cB)$, $c(AB)$ のどの (i,j) 成分も

$$\sum_{\alpha=1}^{k}ca_{i,\alpha}b_{\alpha,j}$$

と表せるので，結合法則が成り立つ．

問題 8　$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ とすれば，$A^2=0$ である．

問題 9

$$A^2=-\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix},\quad B^2=-\begin{pmatrix}3&2&0&-2\\2&3&2&0\\0&2&3&2\\-2&0&2&3\end{pmatrix}.$$

問題 10　(i)

$$S^2=\Bigl(E_{n,1}+\sum_{i=1}^{n-1}E_{i,i+1}\Bigr)^2$$

$$= E_{n,1}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} E_{n,1}E_{i,i+1} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}E_{n,1} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} E_{i,i+1}E_{j,j+1}$$

$$= 0 + E_{n,2} + E_{n-1,1} + \sum_{i=1}^{n-2} E_{i,i+2}.$$

(ii) $n \geq 2$ かつ $k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して,

$$S^k = E_{n,k} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,(i+k)}$$

となることを k に関して帰納的に示す．ただし

$$(i+k) = \begin{cases} i+k & (i+k \leq n) \\ i+k-n & (i+k > n) \end{cases}$$

とする．

いま上の式が $k-1$ のときに成り立っていたとする．

$$S^k = SS^{k-1} = \left(E_{n,1} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}\right)\left(E_{n,k-1} + \sum_{j=1}^{n-1} E_{j,(j+k-1)}\right)$$

$$= E_{n,1}E_{n,k-1} + \sum_{j=1}^{n-1} E_{n,1}E_{j,(j+k-1)} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}E_{n,k-1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} E_{i,i+1}E_{j,(j+k-1)}$$

$$= E_{n,k} + E_{n-1,k-1} + \sum_{i=1}^{n-2} E_{i,(i+k)} = E_{n,k} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,(i+k)}.$$

よって，与えられた行列は $\sum_{k=0}^{n-1} x_k S^k$ と表せる．

問題 11 $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ と表せる．このとき，右辺第 1 項は対称行列であるし，右辺第 2 項は交代行列である．

問題 12

$$\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

問題 13 (i) 行列式の値は順に，11, −6, $ad - bc$. (ii) 1, 1, −1.

問題 14 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ が平行であることと，位置ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が 1 次従属であることは同値である．この場合には，$\boldsymbol{a}_2 = c\boldsymbol{a}_1$ となる定数 c が存在するので,

$$|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2| = c|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1| = c\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} \\ a_{2,1} & a_{2,1} \end{vmatrix} = 0.$$

逆に，$|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2| = 0$ ならば，$a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} = 0$ となる．$a_{1,1} \neq 0$ ならば,

$\boldsymbol{a}_2 = (a_{1,2}/a_{1,1})\boldsymbol{a}_1$. $a_{1,1} = 0$ ならば，$a_{2,1} \neq 0$ であるから，$a_{1,2} = 0$. ゆえに，$\boldsymbol{a}_2 = (a_{2,2}/a_{2,1})\boldsymbol{a}_1$.

問題 15　-3, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(a-b)(b-c)(c-a)$.

問題 16

$$\sigma \cdot \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ゆえに，

$$(\sigma \cdot \sigma') \cdot \sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

同様にして，

$$\sigma \cdot (\sigma' \cdot \sigma'') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

となり，結合法則が示された．

問題 17　(i) 定理 1.3.5 により，n 次正方行列は各列ごとに線形である．定理 1.3.8 により，列に関する線形性は行に関する線形性に読み替えることができる．

(ii) 定理 1.3.5 により，n 次正方行列は 2 つの列ベクトルを入れ替えると符号が変わる．定理 1.3.8 により，列に関する議論は行に関する議論に読み替えることができるので，n 次正方行列は 2 つの行ベクトルを入れ替えると符号が変わる．

問題 18　ファンデルモンドの行列式において，$i \neq j$ の場合に，もし $a_i = a_j$ ならば，行列式の値は 0 になるので，この行列式は多項式 $\prod_{i>j}(a_i - a_j)$ を因数としてもつことがわかる．行列式も多項式もともに $1 + \cdots + (n-1) = (n-1)n/2$ 次式であり，単項 $a_2 a_3^2 \cdots a_n^{n-1}$ の係数がともに 1 であるから，両者は一致しなければならない．

問題 19　${}^tE_c A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{pmatrix}$.

問題 20　系の左辺の n 次正方行列を X とし，その部分行列 A を $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ とする．A が正則でなければ，集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ において 1 次従属である．したがって，X の最初の k 行も 1 次従属である．ゆえに，両辺の行列式の値はともに 0 となり，等号が成り立つ．A が正則な場合には，集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ が 1 次独立であるから，$\mathbb{R}^k$ の基底でもある．したがって，B の列ベクトルはどれも，$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ の 1 次結合で表せる．ゆえに，定理 1.3.7 の直前に述べた，行列 X の列に関する基本変形の (ii), (iii) を行って，

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

とすることができる．基本変形の (ii), (iii) は行列式の値を変えないから，

$$\det{}_n(X) = \det{}_n\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det{}_n \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1_{n-k} \end{pmatrix} \right) \det{}_n \left(\begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det{}_k(A) \det{}_{n-k}(C).$$

問題 21 (i) 交代行列 X は ${}^tX = -X$ を満たすので，

$$\det{}_n(X) = \det{}_n({}^tX) = \det{}_n(-X) = (-1)^n \det{}_n(X).$$

したがって，n が奇数の場合には，$\det{}_n(X) = 0$ となる．

(ii)

$$\det{}_{2n} \left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \right) = \det{}_{2n} \left(\begin{pmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det{}_{2n} \left(\begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det{}_n(A+B) \det{}_n(A-B).$$

問題 22

$$\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & e & 1 \\ c & f & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & d+y & 1 \\ b+x & e+y & 1 \\ c+x & f+y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & d+y \\ b+x & e+y \\ c+x & f+y \end{vmatrix}.$$

問題 23 (i)

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & a \\ c & b \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c \\ b \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} c \\ a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca).$$

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ a+b & a+b \\ 2b & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a-b) & 2(b-a) \\ a-b & b-a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -(a-b)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = (b - b^2) - a(1 - b^2) + a^2(1 - b)$$

$$= (1-b)(b - a(1+b) + a^2) = (1-b)(a-1)(a-b).$$

$$\begin{vmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} = a(b^2 - c^2) - b(a^2 - c^2) + c(a^2 - b^2)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a).$$

(ii) 2, 3, 0.

問題 24

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix} = a(1-1) - b(1-1) + c(1-1) = 0.$$

系 1.4.4 を使うと,

$$\begin{vmatrix} 1 & d \\ 1 & e \\ 1 & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & d & 1 \\ 1 & e & 1 \\ 1 & f & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

問題 25 行列 A を行ベクトルを使って, $A = {}^t(\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \boldsymbol{a}^3)$ と表せば,

$$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 B \\ \boldsymbol{a}^2 B \\ \boldsymbol{a}^3 B \end{pmatrix}$$

となる. また, 正方行列に対しては, $i \neq j$ とすれば,

$$\det{}_2\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^i B \\ \boldsymbol{a}^j B \end{pmatrix}\right) = \det{}_2\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^i \\ \boldsymbol{a}^j \end{pmatrix} B\right) = \det{}_2\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^i \\ \boldsymbol{a}^j \end{pmatrix}\right) \det{}_2(B)$$

となるので, 定理 1.4.3 を使うと,

$$\begin{aligned} \det{}_{3,2}(AB) &= \det{}_2\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 B \\ \boldsymbol{a}^2 B \end{pmatrix}\right) - \det{}_2\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 B \\ \boldsymbol{a}^3 B \end{pmatrix}\right) + \det{}_2\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^2 B \\ \boldsymbol{a}^3 B \end{pmatrix}\right) \\ &= \det{}_2\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \boldsymbol{a}^2 \end{pmatrix}\right) \det{}_2(B) - \det{}_2\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \boldsymbol{a}^3 \end{pmatrix}\right) \det{}_2(B) \\ &\quad + \det{}_2\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^2 \\ \boldsymbol{a}^3 \end{pmatrix}\right) \det{}_2(B) \\ &= \det{}_{3,2}(A) \det{}_2(B). \end{aligned}$$

問題 26

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & b & a \\ b & b & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & 1 \\ a & a & b & 1 \\ a & b & a & 1 \\ b & b & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ a-b & a-b & 0 & 0 \\ a-b & 0 & a-b & 0 \\ b & b & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ a-b & a-b & 0 \\ a-b & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

問題 27 $\mathrm{sgn}_I(c) \det{}_2({}^tE_c A)$ の値を c が $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ の場合について計算する.

$$\frac{1}{(2\sqrt{3})^2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{12}\times 2 = \frac{1}{6},$$

$$-\frac{1}{(2\sqrt{3})^2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix} = \frac{1}{12}\times 2 = \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{(2\sqrt{3})^2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix} = \frac{1}{12}\times 2 = \frac{1}{6}.$$

$\mathrm{sgn}_I(d)\det{}_2({}^tE_dB)$ の値を c が $\{1,2\}, \{3,4\}$ の場合と，c が $\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}$ の場合に分けて計算する．

$$\frac{1}{2^2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{2^2}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{4}\times 0 = 0.$$

後半に入る．

$$-\frac{1}{2^2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\times(-1) = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2^2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{4}\times 1 = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2^2}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{4}\times 1 = \frac{1}{4},$$

$$-\frac{1}{2^2}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\times(-1) = \frac{1}{4}.$$

問題 28 A が $n\times(n-2)$ 行列ならば，$(A,\widetilde{\mathbf{1}})$ は $n\times(n-1)$ 行列であるから，系 1.4.12 により，

$$\det{}_{n,n-1}((A,\widetilde{\mathbf{1}})) = \det{}_n((A,\widetilde{\mathbf{1}},\widetilde{\mathbf{1}})) = 0.$$

問題 29 $\det{}_{4,3}(A) = \det{}_4((A,\widetilde{\mathbf{1}}))$ となるので，右辺に例 1.3.16 の正方行列に対するラプラス展開を使うと，

$$\begin{vmatrix}a & f\\ b & g\end{vmatrix}\begin{vmatrix}r & 1\\ s & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}a & f\\ c & h\end{vmatrix}\begin{vmatrix}q & 1\\ s & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & f\\ d & i\end{vmatrix}\begin{vmatrix}q & 1\\ r & 1\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}b & g\\ c & h\end{vmatrix}\begin{vmatrix}p & 1\\ s & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}b & g\\ d & i\end{vmatrix}\begin{vmatrix}p & 1\\ r & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}c & h\\ d & i\end{vmatrix}\begin{vmatrix}p & 1\\ q & 1\end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix}a & f\\ b & g\end{vmatrix}(r-s) - \begin{vmatrix}a & f\\ c & h\end{vmatrix}(q-s) + \begin{vmatrix}a & f\\ d & i\end{vmatrix}(q-r)$$
$$+\begin{vmatrix}b & g\\ c & h\end{vmatrix}(p-s) - \begin{vmatrix}b & g\\ d & i\end{vmatrix}(p-r) + \begin{vmatrix}c & h\\ d & i\end{vmatrix}(p-q).$$

問題 30 (i) A の線形性により，その像の元 $A\boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y}$ と定数 a, b に対して，$aA\boldsymbol{x}+$

$bA\boldsymbol{y}=A(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})$ は再び A の像に属するので，A の像は部分ベクトル空間である．

(ii) A の核の元 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ と定数 a,b に対して，再び A の線形性により，$A(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=aA\boldsymbol{x}+bA\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ となるので，$a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}$ は A の核の元である．

問題 31　(i) $\Rightarrow$ (ii) U はユニタリであるから，$U^*U=1_n$．左辺の (i,j) 成分は $(\boldsymbol{u}_i|\boldsymbol{u}_j)$ であるから，$(\boldsymbol{u}_i|\boldsymbol{u}_j)=\delta_{i,j}$．よって，$\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n\}$ は規格直交基底である．

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i$ とすれば，$U\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{u}_i$．したがって，

$$\|U\boldsymbol{x}\|^2=\sum_{i,j=1}^n \overline{x_i}x_j(\boldsymbol{u}_i|\boldsymbol{u}_j)=\sum_{i=1}^n|x_i|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)

$$\begin{aligned}&2\{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})\}=\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2\\ =&\|U(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|^2-\|U(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|^2=2\{(U\boldsymbol{x}|U\boldsymbol{y})+(U\boldsymbol{y}|U\boldsymbol{x})\}.\end{aligned}$$

したがって，$\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})=\mathrm{Re}(U\boldsymbol{x}|U\boldsymbol{y})$．ここで，$\boldsymbol{y}$ を i 倍して考えると，$\mathrm{Im}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})=\mathrm{Im}(U\boldsymbol{x}|U\boldsymbol{y})$．したがって，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対して，

$$(\boldsymbol{x}|U^*U\boldsymbol{y})=(U\boldsymbol{x}|U\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．ゆえに，$U^*U=1_n$．

問題 32

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))=2\{(\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}|A\boldsymbol{x})\},\\ &i(i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|A(i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))-i(i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|A(i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))=2\{(\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{y}|A\boldsymbol{x})\}\end{aligned}$$

となるから，

$$4(\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{y})=\sum_{k=0}^3 i^k(i^k\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|A(i^k\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))$$

と表せる．

問題 33　最初の行列の固有方程式は $(\lambda-3)^2+4=0$ であるから，これを解くと固有値は $3\pm2i$ である．固有値 $3\pm2i$ の固有ベクトル $x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ は

$$\begin{pmatrix}3&2i\\-2i&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(3\pm2i)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

を満たすので，$x\mp y=0$ となることがわかる．よって，固有値 $3+2i$ の対応する固有空間は固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ の張る 1 次元部分ベクトル空間により与えられる．同様に，固有値 $3-2i$ に対応する固有空間は固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ の張る 1 次元部分ベクトル空間により与えられる．

2 番目の行列の固有方程式 $(\cos\theta-\lambda)(-\cos\theta-\lambda)-\sin^2\theta=0$ を整理すると，$\lambda^2-1=0$ となるので，固有値は $\lambda=\pm1$ である．固有値が 1 の場合の固有ベクト

ル $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ は,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たす. したがって, 固有値 1 に対応する固有ベクトルは, $x \neq 0$ のとき, $\cos(\theta/2)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\theta/2)\boldsymbol{e}_2$ $(\theta \neq \pi + 2n\pi)$ であり, $y \neq 0$ のとき, $\cos(\theta/2)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\theta/2)\boldsymbol{e}_2$ $(\theta \neq 2n\pi)$ である. 以上をまとめると, 固有値 1 に対応する固有空間は, ベクトル $\cos(\theta/2)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\theta/2)\boldsymbol{e}_2$ の張る 1 次元部分ベクトル空間である. 固有値 -1 に対応する固有ベクトルは, $x \neq 0$ のとき, $\sin(\theta/2)\boldsymbol{e}_1 - \cos(\theta/2)\boldsymbol{e}_2$ $(\theta \neq 2n\pi)$ であり, $y \neq 0$ のとき, $\sin(\theta/2)\boldsymbol{e}_1 - \cos(\theta/2)\boldsymbol{e}_2$ $(\theta \neq \pi + 2n\pi)$ である. 以上をまとめると, 固有値 -1 に対応する固有空間は, ベクトル $\cos(\theta/2)\boldsymbol{e}_1 - \sin(\theta/2)\boldsymbol{e}_2$ の張る 1 次元部分ベクトル空間である.

最後の行列の固有方程式は $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ であるから, 固有値は $1, 2$ である. 固有値 1 の固有ベクトルは $\boldsymbol{e}_1$ であるから, その固有空間は $\mathbb{C}\boldsymbol{e}_1$ である. 固有値 2 の場合は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は $2y = x$ となるので, その固有空間はベクトル $2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ の張る 1 次元部分ベクトル空間である.

問題 34 (i) $H = 2^{-1}(X + X^*)$ かつ $K = (2i)^{-1}(X - X^*)$ とすればよい. いま, $X = H' + iK'$ となる自己随伴行列 H', K' が存在したとすると, $H' - H = i(K - K')$ となる. もしこの行列が零行列でなければ, 左辺は自己随伴であるから, $(H' - H)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす零でない固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在する. したがって, $(K - K')\boldsymbol{x} = -i\lambda\boldsymbol{x}$ となり, 自己随伴行列 $K - K'$ が純虚数の固有値をもつことになり矛盾が生じる. よって, H, K の一意性がわかる.

(ii) $(H + iK)^* = H - iK$ であるから,

$$(H + iK)^*(H + iK) - (H + iK)(H + iK)^* = 2i(HK - KH)$$

となるので, $X^*X = XX^*$ と $HK = KH$ は同値である.

問題 35 (i) $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ とする. A がユニタリならば,

$$|\lambda|^2(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}|\lambda\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{x}) = (A^*A\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるから, λ は絶対値が 1 の複素数である.

(ii) $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i$ かつ $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ ならば,

$$\overline{\lambda_i}\lambda_j(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j) = (\lambda_i\boldsymbol{x}_i|\lambda_j\boldsymbol{x}_j) = (A\boldsymbol{x}_i|A\boldsymbol{x}_j) = (\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j)$$

であるから, $\lambda_i \neq \lambda_j$ ならば, $(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j) = 0$ となり, 異なる固有値に対応する固有空間は互いに直交している. したがって, 定理 1.5.11 の最後の部分と同じようにして,

$U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ を満たすユニタリ行列 U が得られる.

問題 36 行列式を与えている行列を A とすれば，A は n 次行列 $S = E_{n,1} + \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1}$ を用いて，$\sum_{k=1}^{n} x_k S^{k-1}$ と表せる．さて，行列 A の固有方程式 $S\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ は $\lambda^n \boldsymbol{x} = S^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たす．固有ベクトルは零ベクトルではないから，$\lambda^n = 1$ となり，行列 S の固有値は $\{e^{(2\pi i/n)k} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ で与えられる．いま $\omega_k = e^{(2\pi i/n)k}$ とすれば，この固有値に対応する固有ベクトルは

$$^t(1, \omega_k, \omega_k^2, \ldots, \omega_k^{n-1})$$

で与えられる．S はユニタリ行列であるから，あるユニタリ行列 U を用いて，$USU^* = \mathrm{diag}(1, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ と対角化することができる．したがって，

$$\begin{aligned}
\det{}_n(A) &= \det{}_n(USU^*) = \det{}_n\Bigl(\sum_{k=1}^{n} x_k U S^{k-1} U^*\Bigr) \\
&= \det{}_n\Bigl(\mathrm{diag}\Bigl(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k \omega_1^{k-1}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} x_k \omega_{n-1}^{k-1}\Bigr)\Bigr) \\
&= \prod_{\ell=0}^{n-1} (x_1 + x_2\omega_\ell + \cdots + x_n \omega_\ell^{n-1}).
\end{aligned}$$

第 2 章

問題 37 $X, Y, Z \in \mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ かつ $a, b \in \mathbb{C}$ とする．

(i) $(X+Y)\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{x} + Y\boldsymbol{x} = Y\boldsymbol{x} + X\boldsymbol{x} = (Y+X)\boldsymbol{x}$.

(ii) $((X+Y)+Z)\boldsymbol{x} = (X+Y)\boldsymbol{x} + Z\boldsymbol{x} = (X\boldsymbol{x} + Y\boldsymbol{x}) + Z\boldsymbol{x}$
$= X\boldsymbol{x} + (Y\boldsymbol{x} + Z\boldsymbol{x}) = X\boldsymbol{x} + (Y+Z)\boldsymbol{x} = (X + (Y+Z))\boldsymbol{x}$.

(iii) $(X+0)\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = X\boldsymbol{x}$.

(iv) $(X + (-X))\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{x} + (-X)\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{x} - X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x}$.

以上で加法に関する条件が示された．加法と定数倍に関する条件を確かめる．

(i) $((ab)X)\boldsymbol{x} = (ab)X\boldsymbol{x} = a(bX\boldsymbol{x}) = a(bX)\boldsymbol{x} = (a(bX))\boldsymbol{x}$.

(ii) $((a+b)X)\boldsymbol{x} = (a+b)X\boldsymbol{x} = aX\boldsymbol{x} + bX\boldsymbol{x} = (aX)\boldsymbol{x} + (bX)\boldsymbol{x} = (aX+bX)\boldsymbol{x}$.

(iii) $(a(X+Y))\boldsymbol{x} = a(X+Y)\boldsymbol{x} = a(X\boldsymbol{x} + Y\boldsymbol{x}) = aX\boldsymbol{x} + aY\boldsymbol{x} = (aX + aY)\boldsymbol{x}$.

よって，$\mathscr{L}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ はベクトル空間である．

問題 38 (i) 線形変換 $X : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ の核 $\mathrm{Ker}(X) = \{\boldsymbol{x} \in \mathscr{V} \mid X\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の任意の 2 元を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とする．X の線形性により，任意の複素数 a, b に対して，

$$X(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = aX\boldsymbol{x} + bX\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{0} + b\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

となるので，$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(X)$．よって $\mathrm{Ker}(X)$ は $\mathscr{V}$ の部分ベクトル空間である．

(ii) 線形変換 $X : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ の像 $X\mathscr{V}$ の任意の 2 元を $X\boldsymbol{x}, X\boldsymbol{y}$ とする．X の線形性により，任意の複素数 a, b に対して，

$$aX\boldsymbol{x} + bX\boldsymbol{y} = X(a\boldsymbol{x}) + X(b\boldsymbol{y}) = X(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) \in X\mathscr{V}$$

となるので，$X\mathscr{V}$ は $\mathscr{W}$ の部分ベクトル空間である．

問題 39 線形変換 $X : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ に対して，逆変換 Y は条件 $YX = 1_{\mathscr{V}}$ かつ $XY = 1_{\mathscr{W}}$ を満たす写像 $\mathscr{W} \to \mathscr{V}$ として定義される．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{W}$ に対して，

$$\begin{aligned} Y(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) &= Y(aXY\boldsymbol{x} + bXY\boldsymbol{y}) = Y(X(aY\boldsymbol{x} + bY\boldsymbol{y})) \\ &= (YX)(aY\boldsymbol{x} + bY\boldsymbol{y}) = aY\boldsymbol{x} + bY\boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

ただし，2 番目の等号で X の線形性を用いている．

問題 40 (i) 各 f_i の線形性は定義から，容易にわかる．$\sum_{j=1}^n c_j f_j = 0$ ならば，任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$c_i = \sum_{j=1}^n c_j f_j(\boldsymbol{b}_i) = (\sum_{j=1}^n c_j f_j)(\boldsymbol{b}_i) = 0$ となるので，$\{f_1, \ldots, f_n\}$ は 1 次独立である．また，$\mathscr{V}$ 上の線形汎関数 f は $f = \sum_{j=1}^n f(\boldsymbol{b}_j) f_j$ と表せるので，上の集合は基底である．

(ii) $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{b}_i$ ならば，$f_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n a_i f_j(\boldsymbol{b}_i) = a_j$ となるので，$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}_i$.

(iii) $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{b}_i$ ならば，$f_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n a_i f_j(\boldsymbol{b}_i) = a_j$ となる．

問題 41 ベクトル空間 $\mathscr{V}^*$ の双対空間を $\mathscr{V}^{**}$ とすれば，これもベクトル空間である．各ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ に対して，写像 $f \in \mathscr{V}^* \mapsto f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{C}$ は V^* 上の線形汎関数であるから，これは $\mathscr{V}^{**}$ の元である．これを $\widehat{\boldsymbol{x}}$ で表す．このとき，写像 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V} \mapsto \widehat{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{V}^{**}$ は線形かつ単射である．$\mathscr{V}^*$ における双対基底 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ に対して，集合 $\{\widehat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \widehat{\boldsymbol{x}}_n\}$ は $\mathscr{V}^{**}$ におけるその双対基底になっている．したがって，上の写像は全射である．よって，この写像を通じて，$\mathscr{V}$ は $\mathscr{V}^*$ の双対空間と見なすことができる．

問題 42 $\|\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 \pm (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \pm (\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{y}\|^2$ であるから，

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2).$$

問題 43 (i) $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ は規格直交基底であるから，$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{b}_i$ を満たすフーリエ係数 a_i が存在する．このとき，$(\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{b}_j| \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{b}_i) = a_j$ が成り立つので，$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n (\boldsymbol{b}_j|\boldsymbol{x}) \boldsymbol{b}_j$ と表せる．

(ii) (i) により，$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{y}) \boldsymbol{b}_i$ と表せるので，

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \left(\boldsymbol{x} \;\middle|\; \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{y}) \boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{b}_i)(\boldsymbol{b}_i|\boldsymbol{y}).$$

問題 44 $n \times m$ 行列 $X = (x_{i,j})$ は $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} E_{i,j}$ と表せる．$y_{j,i} = f(E_{i,j})$ かつ $Y = (y_{i,j})$ とすれば，Y は $m \times n$ 行列である．

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} f(E_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{i,j} y_{j,i} \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^n}(XY) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^m}(YX). \end{aligned}$$

問題 45 (i) $X = X^*$ ならば，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $(\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{x}) = (X^*\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (X\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})$.

逆に，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$(\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{x}) = (X\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})$ ならば，問題 32 の内積に関する極分解を使うと，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$\begin{aligned}4(\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{y}) &= \sum_{k=0}^{3} i^k(i^k\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|X(i^k\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) \\ &= \sum_{k=0}^{3} i^k(X(i^k\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|i^k\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = 4(X\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

したがって，$(\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{y}) = (X\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ が成り立ち，$(\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|X^*\boldsymbol{y})$. このとき，$(\boldsymbol{x}|(X - X^*)\boldsymbol{y}) = 0$ が任意の $\boldsymbol{x}$ に対して成り立つので，$(X - X^*)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. これが任意の $\boldsymbol{y}$ に対して成り立つので，$X - X^* = 0$.

(ii) X が等長ならば，$X^*X = 1$. したがって，$(\boldsymbol{x}|X^*X\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})$ となり，$(X\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})$. 逆に，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$(X\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})$ ならば，再び，問題 32 の内積に関する極分解を使うと，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，$(X\boldsymbol{x}|X\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$. このとき，$(\boldsymbol{x}|(X^*X-1)\boldsymbol{y}) = 0$ となるので，$X^*X - 1 = 0$.

問題 46 有限次元の内積空間から自分自身への線形変換 X は定理 2.1.15 の直後の (2.2) 式で説明したように，行列 $\pi X \pi^{-1}$ と同一視することができる．また，系 1.3.13 により，行列 A に対して，$BA = 1$ を満たす B が存在すれば，A は正則であるから，$AB = 1$ も成り立つ．したがって，$X^*X = 1$ ならば，$XX^* = 1$ も成り立つことがわかる．

問題 47 X の極分解 $V|X|$ の議論を，X の代わりに X^* に適用すると，X^* の極分解 $X^* = U|X^*|$ が得られる．

$$XX^* = V|X||X|V^* = (V|X|V^*)(V|X|V^*)$$

となるので，両辺の平方根をとると，$|X^*| = V|X|V^*$ となる．V^*V は $|X|\mathscr{V}$ への射影であったから，X の極分解の随伴を考えると，

$$X^* = |X|V^* = V^*V|X|V^* = V^*|X^*|.$$

ここで，極分解の一意性を使うと，$U = V^*$, $X = |X^*|V$ と表せる．

問題 48 (i) 置換 $\sigma \cdot \sigma'$ を行うときの互換は，置換 σ' を行うときの互換に続けて，置換 σ を行うときの互換を行えばよいから，$\sigma \cdot \sigma'$ の偶奇性は，σ' の偶奇性と σ の偶奇性の積になる．

(ii) 巡回置換 $(i, i+1, \ldots, j)$ は $j - i$ 個の互換の積として表せるので，(i) によりその偶奇性は $(-1)^{j-i}$ で与えられる．

(iii) 置換 σ^{-1} は置換 σ をするときの互換を逆に辿ればよいから，σ^{-1} の偶奇性は σ の偶奇性と同じである．

問題 49 行列式の交代性と補題 2.4.3 を用いると，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,\ell}((X_1,X_2)) &= (-1)^{k(\ell-k)}\det{}_{\ell,k}((X_2,X_1))\\ &= (-1)^{k(\ell-k)}\sum_{d\in\mathscr{C}^I_{\ell-k}}\det{}_{\ell-k}(E^*_dX_2)\det{}_{n,\ell}((E_d,X_1))\\ &= \sum_{d\in\mathscr{C}^I_{\ell-k}}\det{}_{n,\ell}((X_1,E_d))\det{}_{\ell-k}(E^*_dX_2).\end{aligned}$$

問題 50 (i) 定理 2.4.10 のラプラス展開において，$P_cX_1 = X_1$ ならば，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,\ell}(X) &= \sum_{c'\in\mathscr{C}^I_k}\det{}_{n,k}(P_{c'}P_cX_1)\det{}_{n-k,\ell-k}(E^*_{I\setminus c'}X_2)\\ &= \sum_{c'\in\mathscr{C}^I_k}\operatorname{sgn}(c')\det{}_k(E^*_{c'}P_cX_1)\det{}_{n-k,\ell-k}(E^*_{I\setminus c'}X_2)\\ &= \operatorname{sgn}(c)\det{}_k(E^*_cX_1)\det{}_{n-k,\ell-k}(E^*_{I\setminus c}X_2).\end{aligned}$$

(ii) $P_dX_2 = X_2$ ならば，行列式の交代性と定理 2.4.10 を用いると，

$$\begin{aligned}\det{}_{n,\ell}(X) &= (-1)^{k(\ell-k)}\det{}_{\ell,k}((X_2,X_1))\\ &= (-1)^{k(\ell-k)}\operatorname{sgn}_I(d)\det{}_{\ell-k}(E^*_dX_2)\det{}_{n-(\ell-k),k}(E^*_{I\setminus d}X_1).\end{aligned}$$

問題 51 命題 2.3.8 と定理 2.4.4 の主張 (i) を組み合わせて証明が得られる．

問題 52 まず，Cullis 符号に関しては，

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}_I(\tau(\sigma(K))) &= (-1)^{\sum_{i=1}^k(\tau(\sigma(i))-i)}\\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^k(\tau(\sigma(i))-\sigma(i))}(-1)^{\sum_{i=1}^k(\sigma(i)-i)}\\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^k(\tau(\sigma(i))-\sigma(i))}\operatorname{sgn}_I(\sigma(K))\end{aligned}$$

となる．つぎに，$\sigma(K)$, $\tau(\sigma(K))$ の元を小さい順に並べたものを，それぞれ，$i_1, \ldots, i_k$, $j_1, \ldots, j_k$ とすると，

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_k\\ \tau\cdot\sigma(1) & \ldots & \tau\cdot\sigma(k)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_k\\ \tau(i_1) & \ldots & \tau(i_k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau(i_1) & \ldots & \tau(i_k)\\ \tau\cdot\sigma(1) & \ldots & \tau\cdot\sigma(k)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_k\\ \tau(i_1) & \ldots & \tau(i_k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_k\\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(k)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}_{n,k}(\tau\cdot\sigma) &= \operatorname{sgn}_I(\tau(\sigma(K)))\begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_k\\ \tau\cdot\sigma(1) & \ldots & \tau\cdot\sigma(k)\end{pmatrix}\\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^k(\tau(\sigma(i))-\sigma(i))}\begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_k\\ \tau(i_1) & \ldots & \tau(i_k)\end{pmatrix}\operatorname{sgn}_{n,k}(\sigma)\end{aligned}$$

$$= (-1)^{\sum_{\ell=1}^{k}(j_\ell - i_\ell)} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_k \\ \tau(i_1) & \dots & \tau(i_k) \end{pmatrix} \mathrm{sgn}_{n,k}(\sigma)$$

となる．

第 3 章

問題 53　問題の行列の積を直接計算すればよい．

問題 54　定理 2.4.10 のラプラス展開と命題 3.2.7 による．

問題 55　(i) $\mathbf{1}^{(1)}$ の第 i 番目の成分は $(-1)^{i-1}$ であるから，正方行列 $(\mathbf{1}^{(1)}, X)$ の行列式の第 1 列に関する展開を行うと，

$$\begin{aligned} \det{}_n((\mathbf{1}^{(1)}, X)) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}(-1)^{i-1} \det{}_{n-1}(E^*_{I\setminus\{i\}} X) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \det{}_{n-1}(E^*_{I\setminus\{i\}} X) = \mathrm{Det}_{n,n-1}(X). \end{aligned}$$

(ii) 系 2.4.7 の証明で $\widetilde{\mathbf{1}}^{(1)}$ を $\mathbf{1}^{(1)}$ に置き換えればよい．

問題 56　$V_{n,k}(\mathbb{C})$ および $V_{n,n-k}(\mathbb{C})$ の元

$$V = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) \quad かつ \quad V' = (\boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n)$$

が $(V, V') \in SU(n)$ を満たしているとすれば，$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の規格直交基底で，$J\pi_k(V) = \pi_{n-k}(V')$ を満たしている．もし $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$ とすれば，

$$\begin{aligned} &Ja(\boldsymbol{v})J^*\pi_k(V) \\ =&(-1)^{k(n-k)} Ja(\boldsymbol{v})\pi_{n-k}(V') = (-1)^{k(n-k)} J\boldsymbol{v} \wedge \pi_{n-k}(V') \\ =&(-1)^{k(n-k)} \sum_{i=1}^{n} c_i J\boldsymbol{v}_i \wedge \pi_{n-k}(V'). \end{aligned}$$

ここで，$c_i = (\boldsymbol{v}_i|\boldsymbol{v})$ かつ

$$(V, V') = (-1)^{k-i}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \widehat{\boldsymbol{v}_i}, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n)$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} &Ja(\boldsymbol{v})J^*\pi_k(V) \\ =&(-1)^{k(n-k+1)+1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}_i) \boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\boldsymbol{v}_i} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k \\ =&(-1)^{k(n-k+1)+1} a(\boldsymbol{v})^* \pi_k(V) = (-1)^{kn+1} a(\boldsymbol{v})^* \pi_k(V). \end{aligned}$$

問題 57　ラプラス展開により，

$$0 = \det{}_4((X, X)) = \sum_{c \in \mathscr{C}_2^I} \det{}_{4,2}(P_c X) \det{}_2(E^*_{I\setminus c} X)$$

$$= \sum_{c\in\mathscr{C}_2^I} \operatorname{sgn}_I(c)\det{}_2(E_c^* X)\det{}_2(E_{I\setminus c}^* X).$$

ここで，

$$\operatorname{sgn}_I(\{1,2\}) = \operatorname{sgn}_I(\{3,4\}) = \operatorname{sgn}_I(\{1,4\}) = \operatorname{sgn}_I(\{2,3\}) = 1,$$
$$\operatorname{sgn}_I(\{1,3\}) = \operatorname{sgn}_I(\{2,4\}) = -1$$

となることを使うと，上の式の右辺は，証明したい式の 2 倍であることがわかる．

問題 58 $X = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k)$, $Y = (\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_k)$ とすれば，

$$\det{}_k(X^*Y) = \det{}_k((\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{y}_j))$$

となる．したがって，補題 3.1.7 により，

$$\det{}_k(X^*Y) = (\varGamma(Y)\boldsymbol{e}_K^K|\varGamma(X)\boldsymbol{e}_K^K) = \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} (\varGamma(Y)\boldsymbol{e}_K^K|\boldsymbol{e}_c^I)(\boldsymbol{e}_c^I|\varGamma(X)\boldsymbol{e}_K^K)$$
$$= \sum_{c\in\mathscr{C}_k^I} \det{}_{n,k}(P_cY)\overline{\det{}_{n,k}(P_cX)}.$$

上の証明で Cullis 基底の代わりに，プリュッカー基底を使えば，もう 1 つの式も同じように証明することができる．

問題 59

$$V' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2), \frac{1}{\sqrt{10}}(-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 2\sqrt{2}\boldsymbol{e}_3)\right)$$

の場合には，$\mathrm{Det}_{3,2}(V')$ の値は

$$\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

問題 60 問題の 2 つのベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ とする．このとき，集合 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ は $\mathbb{C}^n$ において 1 次独立であるから，$X = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)B$ を満たす 2 次正方行列 B が存在する．他方，$\det{}_{n,2}(X) = \det{}_{n,2}((\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2))\det{}_2(B)$ と表せる．右辺の行列式 $\det{}_{n,2}((\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2))$ を第 2 列について展開すると，

$$\sum_{i=2m+1}^{n} (-1)^i \det{}_{n-1,1}(E_{I\setminus\{i\}}^* \boldsymbol{b}_1).$$

この式に現れる $(n-1)\times 1$ 行列 $E_{I\setminus\{i\}}^*\boldsymbol{b}_1$ の成分は上から第 $2m$ 行までは連続して 1 が並び，そこから下は 0 が連続して $n-2m-1$ 個並んでいるので，その行列式 $\det{}_{n-1,1}(E_{I\setminus\{i\}}^*\boldsymbol{b}_1)$ の値は 0 になる．よって，$\det{}_{n,2}(X) = 0$.

問題 61 (i) $XYX = X$ ならば，

$$\operatorname{rank}(X) = \operatorname{rank}(XYX) \le \min\{\operatorname{rank}(XY), \operatorname{rank}(X)\}$$
$$\le \min\{\operatorname{rank}(X), \operatorname{rank}(Y)\} \le \operatorname{rank}(Y).$$

$YXY = Y$ ならば，同様にして，$\mathrm{rank}(Y) \le \mathrm{rank}(X)$．したがって，$X$ の一般逆行列 Y が反射的ならば，それらの階数は等しい．逆に，X とその一般逆行列 Y の階数が等しいとする．この場合には，

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(X) = \mathrm{rank}(XYX) &\le \min\{\mathrm{rank}(X), \mathrm{rank}(YX)\} \\ &\le \min\{\mathrm{rank}(X), \mathrm{rank}(Y)\} = \mathrm{rank}(Y) = \mathrm{rank}(X)\end{aligned}$$

となるので，$\mathrm{rank}(YX) = \mathrm{rank}(Y)$．したがって X を $n \times m$ 行列とすれば，2 つの部分ベクトル空間 $YX\mathbb{C}^m$ と $Y\mathbb{C}^n$ が一致する．したがって，任意のベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して，$YX\boldsymbol{x} = Y\boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ が存在する．よって，

$$YXY\boldsymbol{y} = YX(Y\boldsymbol{y}) = YX(YX\boldsymbol{x}) = Y(XYX)\boldsymbol{x} = YX\boldsymbol{x} = Y\boldsymbol{y}$$

が成り立ち，一般逆行列 Y は反射的である．

問題 62　(i) X^*X の一般逆行列を Y とすれば，$|X|^2Y|X|^2 = |X|^2$．両辺の随伴を考えると，$|X|^2Y^*|X|^2 = |X|^2$．ここで，X, X^* の像への射影をそれぞれ P, Q とすれば，$PX = X$，$XQ = X$ が成り立つ．また，$|X|^2Y^*|X|^2 = |X|^2$ より，$|X|^2Y^* = Q$．両辺の随伴を考えると $Y|X|^2 = Q$ が成り立つ．ゆえに，

$$(XYX^*)^2 = XY|X|^2YX^* = XQYX^* = XYX^*$$

となるので，XYX^* は射影である．直ちに $XYX^* \le P$ がわかる．他方，$XYX^*X = XQ = X$ であるから，逆向きの不等式も得られる．

(ii) X のムーア–ペンローズ逆行列を Y とし，$Z = YXY$ とおくと，$XZX = X(YXY)X = XYX = X$．同様に，$ZXZ = (YXY)X(YXY) = YXY = Z$ となるので，Z は X の反射的一般逆行列である．また XY は射影であるから，$XZ = XYXY = XY$ も射影である．また YX は射影であるから，$ZX = YXYX = YX$ も射影である．よって，Z は X のムーア–ペンローズ逆行列である．ここで，(i) を用いると，$P = X(X^*X)^-X^*$ かつ $Q = X^*(XX^*)^-X$ と表せる．さらに XY と YX は，命題 3.5.6 により，それぞれ X, X^* の像への射影であるから，

$$\begin{aligned}Z = YXY &= QY = X^*(XX^*)^-XY \\ &= X^*(XX^*)^-P = X^*(XX^*)^-X(X^*X)^-X^*.\end{aligned}$$

(iii) 最初の不等式から，Y は最小二乗型であり，後の不等式を用いて命題 3.5.4 の証明で示した $Y\boldsymbol{a} \perp \mathrm{Ker}(X)$ と系 3.5.7 を使うと，Y はムーア–ペンローズ逆行列であることがわかる．

第 4 章

問題 63　例えば

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすれば，$\det_{3,2}(T) = 0$, $\det_{2,1}(X) = 1$, $\det_{3,1}(TX) = 2.5$ となる．

問題 64 系 4.1.5 により，

$$\det_{n,n-1}(TE_{I\setminus\{i\}}) = \det_n(T)\det_{n,n-1}(E_{I\setminus\{i\}}).$$

他方，補題 2.4.2 により，$\det_{n,n-1}(E_{I\setminus\{i\}}) = \mathrm{sgn}_I(I \setminus \{i\}) = (-1)^{n-i}$.

問題 65 (i) 2, (ii) 3, (iii) 0, (iv) 3.

付録 A

問題 66 三角形 ABC と A′B′C′ の頂点を表すベクトルをそれぞれ，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ とする．もし AA′, BB′, CC′ が 1 点で交わるならば，

$$(1-\alpha)\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{a}' = (1-\beta)\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{b}' = (1-\gamma)\boldsymbol{c} + \gamma\boldsymbol{c}'$$

を満たす，0 でも 1 でもない実数 α, β, γ が存在する．これらの式を書き直すと

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\{(1-\alpha)\boldsymbol{a} - (1-\beta)\boldsymbol{b}\} = \frac{1}{\beta-\alpha}(-\alpha\boldsymbol{a}' + \beta\boldsymbol{b}'),$$
$$\frac{1}{\gamma-\beta}\{(1-\beta)\boldsymbol{b} - (1-\gamma)\boldsymbol{c}\} = \frac{1}{\gamma-\beta}(-\beta\boldsymbol{b}' + \gamma\boldsymbol{c}'),$$
$$\frac{1}{\alpha-\gamma}\{(1-\gamma)\boldsymbol{c} - (1-\alpha)\boldsymbol{a}\} = \frac{1}{\alpha-\gamma}(-\gamma\boldsymbol{c}' + \alpha\boldsymbol{a}').$$

これらのベクトルはそれぞれ直線 AB, A′B′ の交点，直線 BC, B′C′ の交点，直線 CA, C′A′ の交点である．これら 3 点を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ とすれば，

$$(\beta-\alpha)\boldsymbol{x} + (\gamma-\beta)\boldsymbol{y} + (\alpha-\gamma)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

となるので，これら 3 つの交点は同一直線上に載っている．

付録 C

問題 67 (i)

$$\int_0^{\pi} \cos\theta \sin^{j-1}\theta\, d\theta = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\theta \cos^{j-1}\theta\, d\theta$$

となる．右辺の被積分関数は奇関数であるから，この積分値は 0 になる．

(ii) まず

$$\int_0^{\pi} d\theta = \pi, \quad \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 2$$

である．つぎに，任意の自然数 k に対して，部分積分を使って

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^{k+1}\theta\,d\theta &= \int_0^\pi \sin\theta \sin^k\theta\,d\theta \\ &= [-\cos\theta\sin^k\theta]_0^\pi + \int_0^\pi k\cos^2\theta\sin^{k-1}\theta\,d\theta \\ &= k\int_0^\pi (1-\sin^2\theta)\sin^{k-1}\theta\,d\theta \\ &= k\Big(\int_0^\pi \sin^{k-1}\theta\,d\theta - \int_0^\pi \sin^{k+1}\theta\,d\theta\Big).\end{aligned}$$

これを整理すると，任意の自然数 k に対して，

$$\int_0^\pi \sin^{k+1}\theta\,d\theta = \frac{k}{k+1}\int_0^\pi \sin^{k-1}\theta\,d\theta.$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^j\theta\,d\theta &= \frac{j-1}{j}\int_0^\pi \sin^{j-2}\theta\,d\theta \\ &= \frac{j-1}{j}\frac{j-3}{j-2}\int_0^\pi \sin^{j-4}\theta\,d\theta \\ &\;\;\vdots \\ &= \begin{cases} \dfrac{(j-1)(j-3)\cdots 3\cdot 1}{j(j-2)\cdots 4\cdot 2}\displaystyle\int_0^\pi d\theta & (j：偶数) \\ \dfrac{(j-1)(j-3)\cdots 4\cdot 2}{j(j-2)\cdots 3\cdot 1}\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta & (j：奇数) \end{cases}.\end{aligned}$$

付録E　ミュール卿の書物より

行列式に関して，1900年から1920年の間に発表された論文や著書についての，個人的なレビューとして知られるミュールの本[11]から，Cullisの教科書の第I巻と第II巻に関する部分を訳出しておく．第III巻は1925年刊行であるから，ここには含まれていない．

Cullis, C.E. (1913)
[Matrices and Determinoids. Vol. I. xii+430 pp. Cambridge.]

この立派な書物では，著者は冒頭において，「矩形行列とdeterminoidsを，正方行列と行列式から区別して扱う．この矩形行列のdeterminoidsは，行列式が正方行列と関係しているのと同じような関係にある.」このような行列式と似たものを定義してみようという考えは，数学を専攻している学生なら誰でも思いつくかもしれない．おそらく，それらのうちで最も安易なのはドストールで，彼は新たに

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix}$$

を "determinant multiple"と呼び，それを

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

と同値なものとして定義している．Cullisが "determinoid"として

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

と定義したものと同じ意味をもってはいるが，行列の場合と同じ方法で議論を進めているので，その計算法は全く違っている．彼は “determinoids” を行列式とは全く独立に定義している．行列の成分のなす積の集まりとして，積の作り方とか，符号の付け方に対して一定の規則を与えてから，この定義から導かれる結果を詳しく調べている．determinoids は通常の行列式の特別な場合であるから，この定義が行列式の通常の定義を含み，その中に包含されて行かなければならない．

この書物は全部で 11 の章からなっている．第 I 章 (pp. 1–2) は一般的な前書きであり，とりわけ新たな概念の定義や記号を扱っている．第 II 章と第 III 章と第 IV 章は 82 頁もの多くを使って，符号の問題を扱っている．第 V 章 (pp. 105–152) は determinoids のいろいろな展開式に関係している．第 VI 章 (pp. 153–208) は重要な章で，ケイリー的な意味での — 行列の等式，和，差，積を扱っている．第 VII 章 (pp. 209–247) は第 VI 章で考えられた積の determinoids を扱っている．第 VIII 章は与えられた行列の小行列式を成分にもつ行列に関するものである．第 IX 章と第 X 章は — determinoids とは直接に関係のない話題が多いが，大切な章で — 行列の階数や 1 次の行列方程式に関係している．第 XI 章 (pp. 304–417) は 1 次の行列方程式を見ることができる，連立 1 次方程式の新たな取り扱いを含んでいる．

説明はていねいで論理的である．また，読者を苛立たせる馴染みにくい用語や言い回しがでてくるが，これらはどれも注意深く定義されており，全部で 22 列からなる有用な索引が付いていて，辞書代わりに利用することができる．

行列式に関する古いテキストと違って，determinoids に関するこのテキストは「応用」を扱っていると思われる唯一の章が最後の章として付いている．著者は現在の著作を，引き続く 2 つの著作で補うことを約束し，その大部分はこれまでの議論では不十分であると思われる部分を補うことに占められ，そこで扱われる内容は，通常の代数，Quantics の代数，代数幾何，ベクトル解析となるであろうと，約束している．これらの新たな著作の出版は，間違いなく科学の発展に資するものとして，大いに期待される．そうすれば，determinoids の理論がどの程度まで，このような進歩に寄与するかが明らかになるであろう．現在見る限りでは，その範囲はそれと関連した行列とか通

常の行列式と比べて，かなり制限されたものになるだろう，と予想しておいた方が無難に思われる．

Cullis, C.E. (1918)
[Matrices and Determinoids. Vol. II. xxiv+555 pp. Cambridge.]

この立派な，第I巻よりもさらに大部な第II巻は，その8つの章がXII–XIXと順番が付けられてはいるが，（第I巻の）続きのようには見えない．“determinoids”という用語はほぼ完全に消えてしまっている．その代わりに，索引からも明らかなように，（正方行列の）行列式が主に論じられている．このことは最初の4つの章の表題を見ると，とりわけ明らかになる．つまり，第XII章 (pp. 1–36) は「Compound matrix」，第XIII章 (pp. 37–106) は「行列の成分と小行列式の関係」，第XIV章 (pp. 107–164) は「正方行列のある性質」，第XV章 (pp. 165–227) は「行列積と部分行列の階数」となっている．この書物を大掴みに一言でいわなければならないとすれば，それは「行列」という言葉である．この巻を第I巻と比べると，いささか内容的に配列も粗雑である．さらに残念なことに，この書物は，何が新しい結果なのかをはっきりと明示しようとしない問題点を抱えており，著者目録や歴史的参考文献がないので，そのことが却って目立ってしまう．

付録F　線形代数のあゆみ

F.1　概観

今日，線形代数は微積分と並んで，大学における教養数学の 2 本柱として広く普及しているが，行列式が現在のような形に落ち着くまでの，先人達の努力の跡を知っておくことは，これからの数学のあるべき方向性を見いだす上でも大切である．実は，このような状況が確立したのは，20 世紀に入ってからで，そんなに古いことではない．行列式の議論が今日の形をとるようになったのは，1903 年に出版された，ワイエルシュトラス，ならびにクロネッカーの書物によるといわれている[1]．それは，線形代数という分野の確立が，1870 年代と比較的新しいからであろう．

また，線形代数の基本概念である，行列と行列式という用語を並べてみると，これら 2 つの概念が同時期に考えだされたような印象を受けるが，これは西欧数学の完成品を輸入したために生じた，我が国固有の事情と考えられる．実は，数学史の世界では，行列式という概念を最初に確立したのは，江戸時代の数学者関孝和ということになっている [15, 16, 17, 18]．実際，関が 1683 年に書いた『解伏題之法』（伏題とは多変数の方程式）の中に連立 2 次方程式の解として，3×3 行列式の記述が見られる．漢字社会では，西欧社会の左から右へ横に書く文字の書き方と違って，縦に右から書く習慣があるから，数字を並べる場合にも，アラビア数字に読み替えてみると

$$\begin{matrix} a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,1} \end{matrix}$$

[1] 竹之内脩：行列式について，1998 年 12 月 3 日の横浜市立大学における講演配布資料．

となっており，その値がサラスの式で与えられている．この時点で関は行列式に特別の名前を与えていないので，どの程度その意義を重要視していたかは明確ではないが，その後数年のうちに，関，田中由真[2]（よしざね）らの研究を通じて行列式概念が確立されていった．しかし，我が国は当時鎖国をしていたために，この影響が国外に及ぶことはなかった．西欧では，関よりほんの少し遅れて，同じ 1683 年にライプニッツがロピタルに宛てた手紙の中で，1 元連立 1 次方程式の解をサラスの式により与えていたが，これも社会的に影響があったとは考えにくい．

歴史を紐解いてみると，行列と行列式は別々の動機に基づいて考えだされたことがわかる．しかも，行列式の歴史の方が行列よりも遙かに古い．いつをもって行列式の概念への第一歩が踏み出されたと見なすのかは，その考え方にもよるが，おしなべて，連立 1 次方程式の解を係数だけを使って書き表す式を，現在私たちが知っているクラメールの公式と同じ式で考えたかどうかが，1 つの判断基準になっている．このような視点には，個人的な恣意が入り得るので，紀元前にまでその歴史を遡る人もいるが，大方は大分下って，中国の楊輝 (1238–1298) が『詳解九章算術』[3] において連立 1 次方程式の解を，クラメールの公式の形で，行列式的なものを含んだ形で与えているところに求める人が多いようである．さらに，1545 年になると，カルダーノが，*Ars Magna* (1545) の中で同じく 2×2 の場合のクラメールの公式を与え，regula de modo と呼んでいる．しかし，これらの結果は行列式の定義を与えたわけではなく，行列式概念の形成史の初めの一歩が踏み出された内容と考えられている．クラメール自身による一般の正方行列を使った公式は 1750 年の書物 *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* に与えられている．また，これら，一般の高次の行列式の定義に関する，関孝和，田中由真，それから 100 年ぐらい後の，クラメール，ベズーらの動機付けに関しては，数学史的観点から，n 次方程式と m 次方程式が共通の解をもつための必要十分条件は，今日ではシルベスターの**終結式**と呼ばれている $n+m$ 次の行列式の値が 0 になることである，という内容の議論がきっかけであるこ

[2] 『算学紛解』1690 年前後．
[3] 劉徽（220 頃–280 頃）の『九章算術』には算木を使った連立方程式の解き方が与えられている．

とが，[18, 5] において報告されている．その数学的内容についてはつぎの第 F.2 節において詳しく説明する．

行列式 (Determinant) という用語はガウスが 1801 年の論文[4]の中で，2 次形式などと関連して使ったものを，コーシーが 1812 年の論文の中で，今日の意味での行列式に対して，この名称を使ったのが始まりといわれている．行列式の表記法に関しても，いろいろな試みにもかかわらず，長い間確立しなかったが，現在のアラビア数字で書かれた行列の両側に縦の棒を引く表記は，1841 年にはすでにケイリーにより使い始められていたといわれている．

他方，数字を長方形（矩形）状に並べた行列の起源に関しても，どの時点で現代的な意味での行列概念が確立したのかは，議論の分かれるところである．1844 年になると，同じ次数の行列のなす集合が数と似た非可換多元環の構造をもつことが，アイゼンシュタインにより指摘されている．1850 年になると，シルベスターは行列の横の並びを行，縦の並びを列と呼び，全体を Matrix と名付けている．現在，日本ではこれに行列という訳語を充てている．この Matrix という用語は 16, 17 世紀には女性の子宮という意味で用いられていたが，同時に鉱石なども大地胎内にあり日々成長しているものと考えられ [20]，18 世紀に入るとその意味が拡大し，地質学では化石とか貴金属，宝石などを内蔵した母石とか岩の固まりを指し，また窯業，鋳造業などでは道具を作る鋳型のようなものを指すようになった．その後，さらに印刷業でも，字母，母型，鋳型，紙型などの用語として使われ，19 世紀になってようやく数学にも取り入れられるという永い経緯がある．このような背景は日本の訳語からは汲み取れない．その後この用語はシルベスターの友人ケイリーによる 1858 年の論文[5]により広く普及するようになった．

グラッテン-ギネスとレダーマン[6]の 1994 年の行列理論の歴史に関する解説によると，近代的な行列理論の起源は，当時発展中の関数方程式のスペクトル論と新しく起こってきた抽象代数学を一括して論じた，フロベニウスの論文[7]を通じて，1870 年代になされたといわれている．また同書は，その後の

---

[4] C.F. Gauss: *Disquisitiones Arithmeticae*, Gerhardt Fleicher (1801).
[5] A. Cayley: Memoir on the theory of matrices, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **1858**, 17-37.
[6] I. Grattan-Guinness and W. Ledermann: Matrix theory, in *Companion Encyclopedia to the History of Philos. of Math. Sci.*, Routledge, 775–786, London.
[7] On linear substitutions and algebraic forms.

基礎固めに関しても

> 20 世紀の初頭においてはハーバード大学の数学者ボッヘルによる *Introduction to Higher Algebra* (1907) が，とくに米国の 1930 年代，40 年代に強い影響を与えた．もう 1 つは，ケンブリッジ大学を卒業した C.E. Cullis が，カルカッタ大学での講義録を 3 冊の大著にまとめた *Matrices and Determinoids* (1913–1925) である．この書物は馴染みのない用語を使っているために，影響力は損なわれているが，最初から矩形行列を扱い，豊富な話題を含んでいる．

と述べている．

20 世紀に入ってからは，線形代数の議論は代数的な方面，新しく起こってきたスペクトル論を中心とする関数解析的な方面，およびその応用としての統計学的方面へと分かれて発展して行く．代数的な方面はその中心課題である加群の議論へと発展し，関数解析的方面は 1926 年に発見された量子力学の記述に無限次行列が使われたのをきっかけに，1929 年にはフォン・ノイマンがヒルベルト空間上の線形作用素の取り扱いの基礎を一気に確立して，スペクトル論の理解を一段と深めて今日に至っている．また，統計学的応用への発展としては，一般逆行列の概念が確立し，正則でない相関係数行列などにも利用可能となっただけでなく，データ数に比べ変数の個数が飛躍的に大きい，高次行列を解析する道具としても有効利用されるようになった．

以上のような経過を踏まえて，すでに江戸時代，極東の小さな島国に，人口では 80 万とも 100 万ともいわれる世界規模の大都市が誕生し，そこで産声をあげた新しい数学の芽が，奇しくも関孝和没後 300 年を迎えた今日に繋がっていることを想うと，江戸文化の奥深さが感じられる反面，技能優先であった和算を含む東アジアの数学が，論理や思想や自然科学を背景にもつ西の数学にとって代わられた歴史的事実を，教訓としてしっかり受け止めておきたい．

F.2 シルベスターの終結式について

17 世紀末に，関孝和や田中由真が行列式を発見するきっかけになった終結式の説明をしておこう．

2 つの多項式

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad (a_0 \neq 0),$$
$$g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2 \quad (b_0 \neq 0)$$

に対して，それらの係数を並べて得られる 3 + 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

の行列式 $\det{}_n(A)$ が，現在では，シルベスターの終結式と呼ばれている．

命題 F.2.1 2 つの方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解をもつための必要十分条件は，$\det{}_5(A) = 0$ となることである．

証明 方程式 $f(x) = 0$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とし，方程式 $g(x) = 0$ の解を β_1, β_2 とする．解と係数の関係により，

$$\frac{a_1}{a_0} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad \frac{a_2}{a_0} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \quad \frac{a_3}{a_0} = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$
$$\frac{b_1}{b_0} = -(\beta_1 + \beta_2), \quad \frac{b_2}{b_0} = \beta_1\beta_2$$

が成り立つ．

2 つの方程式が 0 を共通の解としてもつことと，$a_3 = b_2 = 0$ となることは必要十分である．したがって，この場合には終結式の値は 0 である．また，2 つの方程式が 0 でない共通の解 γ をもったとすると，ベクトル

$${}^t(\gamma^4, \gamma^3, \gamma^2, \gamma, 1)$$

は A を係数行列にもつ連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解になるから，A は正則ではなく，再び終結式の値は 0 となる．

つぎに，解と係数の関係を使って，A の行列成分を α_i $(i = 1, 2, 3)$ と β_j $(j = 1, 2)$ の多項式としてみる．もしある i と j に対して $\alpha_i = \beta_j$ ならば，2 つの方程式は共通の解をもつことになるから，上でわかったように，終結式の値は 0 となり，$\det{}_5(A)$ は $\alpha_i - \beta_j$ を因数にもつことがわかる．したがって，それらの積

$$\prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{2}(\alpha_i - \beta_j)$$

を因数にもつ．この式は α_i, β_j に関して 3×2 次の同次多項式である．

5 次の行列 A の第 1, 2 行を a_0 で，第 3, 4, 5 行を b_0 で割って得られる行列を A' とすると，$\det{}_5(A) = a_0^2 b_0^3 \det{}_5(A')$ と表せる．行列式 $\det{}_5(A')$ は，定理 1.3.8 を使うと，行に関しても定理 1.3.3 と同じように一般展開されるから，各 $\sigma \in S_5$ に対して，各第 i 行からは第 $\sigma(i)$ 列を選んで得られる 5 個の成分の積の α_i, β_j の多項式としての次数を計算すると

$$\begin{aligned}&(\sigma(1)-1)+(\sigma(2)-2)+(\sigma(3)-1)+(\sigma(4)-2)+(\sigma(5)-3)\\ =&\sum_{i=1}^{5}\sigma(i) - 9 = (1+2+3+4+5) - 9 = 6\end{aligned}$$

となる．したがって，展開式のどの項も 3×2 次となり，同次多項式であることがわかる．よって，ある定数 c を用いて

$$\det{}_5(A') = c\prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{2}(\alpha_i - \beta_j)$$

と表せる．ここで，両辺の $(\beta_1\beta_2)^3$ の係数を比較すると，$c = 1$ であることがわかる．ゆえに，

$$\det{}_5(A) = a_0^2 b_0^3 \det{}_5(A') = a_0^2 b_0^3 \prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{2}(\alpha_i - \beta_j).$$

よって，$\det{}_5(A) = 0$ ならば，$\alpha_i = \beta_j$ を満たす i, j が存在し，2 つの方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ は共通の解をもつことがわかる．■

参考文献

[1] 浅野啓三・長尾　汎：行列と行列式，基礎数学講座 2，共立出版，ii+194, 1956.

[2] C.E. Cullis: *Matrices and Determinoids*, Vol. **I**, Cambridge Univ. Press, xii+429, 1913; ibid. Vol. **II**, xxiii+555, 1918; ibid. Vol. **III**, xviii+681, 1925.

[3] 古屋　茂：行列と行列式，新数学シリーズ 5，培風館，iv+198, 1957.

[4] R.W. Farebrother: A.C. Aitken and the consolidation of matrix theory, *Linear Algebra and its Appl.* **264** (1997), 3–12.

[5] 後藤武史・小松彦三郎：17 世紀日本と 18–19 世紀西洋の行列式, 終結式及び判別式（数学史研究），数理研講究録 **1392** (2004), 117–129.

[6] 川又雄二郎：射影空間の幾何学，朝倉書店，iv+214，2001.

[7] 彌永昌吉・小平邦彦：現代数学概説 I，現代数学 1，岩波書店，viii+602，1961.

[8] S. Kobayashi and K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Interscience Tracts in Pure and Applied Math. 15, John Wiley & Sons, xi+329, 1963.

[9] Y. Nakagami and H. Yanai: On Cullis' determinant for rectangular matrices, *Linear Algebra and its Appl.* **422** (2007), 422–441.

[10] Sir T. Muir: *A treaties on the theory of determinants* revised and enlarged by William M. Metzer., Dover, 766, 2003.

[11] Sir T. Muir : *Contributions to the History of Determinants 1900–1920*, Blackie & Son, xxiv+408, 1930, London.

[12] 押川元重・坂口紘治：基礎線形代数，培風館，vi+191，1984.

[13] 齋藤正彦：線型代数学入門，基礎数学 1，東京大学出版会，vii+279，1966.

[14] 佐藤信哉：連立一次方程式と掃き出し法，基礎講座線型代数第 1 回，数学セミナー，4 月号 (2008)，64–69.

[15] 竹之内脩：関孝和の解伏題之法について，大阪国際大学紀要国際研究論叢 **12** (1998), 1–14.

[16] 竹之内脩：和算における行列式について，大阪国際大学紀要国際研究論叢 **13** (1999), 33–50.

[17] 竹之内脩：田中由真の終結式について，和算研究所紀要 **2** (1999), 3–18.

[18] 竹之内脩：関孝和の数学，共立出版，vi+164，2008.

[19] 山内恭彦・杉浦光夫：連続群論入門，新数学シリーズ 18，培風館，iv+200，1960.

[20] 山本義隆：十六世紀文化革命 1，みすず書房，vi+390+29，2007.

[21] 柳井晴夫・竹内　啓：射影行列・一般逆行列・特異値分解，東京大学出版会，vi+214，1983.

索　引

■数字先頭・欧文先頭和文索引

■和文索引

●あ行

●か行

●さ行

著者
中神　祥臣（なかがみ　よしおみ）
横浜市立大学名誉教授.
理学博士.

柳井　晴夫（やない　はるお）
大学入試センター名誉教授,
聖路加看護大学大学院（特任）教授.
教育学博士, 医学博士.

矩形行列の行列式

平成24年12月10日　発　行

著　者　中　神　祥　臣
　　　　柳　井　晴　夫

編　集　シュプリンガー・ジャパン株式会社

発行者　池　田　和　博

発行所　丸善出版株式会社
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町二丁目17番
編集：電話(03)3512-3261／FAX(03)3512-3272
営業：電話(03)3512-3256／FAX(03)3512-3270
http://pub.maruzen.co.jp/

印刷・製本／シナノ書籍印刷株式会社

ISBN 978-4-621-06508-2 C 3041　Printed in Japan